2次正方行列の固有値問題

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

May, 2017 for emath
V04 Oct 26, 2020 for CalcNT V05 Oct 06, 2021 for LA
V06 Oct 05, 2022 for LA

2 変数の線型変換の座標変換

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が定める線型変換

$$F_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

に対して正則な $P \in M_2(\mathbf{R})$ による座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

を適用する.

2 変数の線型変換の座標変換（その 2）

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} A P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

となる.

目標 正則行列 P をうまく選んで $P^{-1}AP$ を単純にする.

2 変数の線型変換の座標変換（その 3）

ある正則行列 $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるとする.

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) &\Leftrightarrow AP = P\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2) \\
&\Leftrightarrow A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2 \\
&\Leftrightarrow (\alpha I_2 - A)\vec{p}_1 = (\beta I_2 - A)\vec{p}_2 = \vec{0}
\end{aligned}
$$

P は正則であるので $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ なので

$$
|\alpha I_2 - A| = |\beta I_2 - A| = 0
$$

が必要であることが分かります.

2 次正方行列の正則性（復習）

2 次正方行列 $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$B\text{は正則} \quad \Leftrightarrow \quad \left(B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad |B| \neq 0$$

特に

$$\exists \vec{v} \neq \vec{0} \ \left(B\vec{v} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow |B| = 0$$

2 次正方行列の固有方程式

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

-

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A\vec{v} = \alpha\vec{v}\text{を満たす}\vec{v} \neq \vec{0}\text{が存在}$$

具体例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

- 固有値 $\lambda = 5$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例 (No. 2)

- 固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

行列の対角化

- $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，　$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ から P は正則（注意：実は一般論があって必ず正則になる）
- A は対角化可能

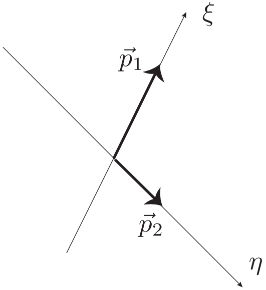
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

行列の対角化（その意味）

- A が定める変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 変数変換

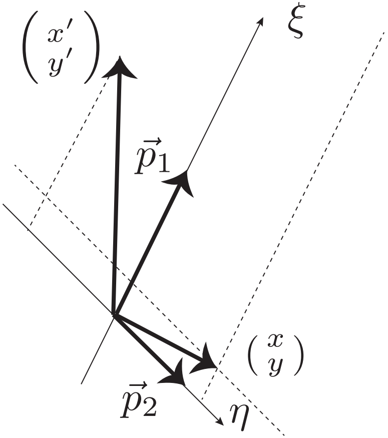
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi' \vec{p}_1 + \eta' \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$



行列の対角化（その意味）(No.2)

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$= P^{-1}AP\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$



行列の対角化（その応用）

- 対角化 $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\begin{aligned}
A^2 &= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} P^{-1} \\
A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

行列の対角化（一般論）

- **定理**　2 次正方行列 A の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

に対して、$\alpha \neq \beta$ が成立するとする。このとき A は対角化可能です。すなわち正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になります。

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ で $\vec{p}_i \neq \vec{0}$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\vec{p}_1 & \beta\vec{p}_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

行列の対角化（一般論）(No.2)

- $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ の正則性

定理 2 次正方行列 P に対して

$$P\text{は正則} \quad \Leftrightarrow \quad \det(P) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(P\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}\right)$$

- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ を示す。

$$\begin{aligned} & c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \\ \rightarrow \quad & (\beta I_2 - A)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) = (\beta - \alpha)c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \\ \rightarrow \quad & c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}$$

- **注意** $\vec{q} \neq \vec{0}$ ならば $\left(c\vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow c = 0\right)$

固有多項式に関する注意

- **定理** P が正則ならば
$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$$
- 2 次正方行列 $A,\ B$ に対して $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を用いる。
- $\det(P^{-1})\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I_2) = 1$
-

$$\begin{aligned}
\det\left(\lambda I_2 - P^{-1}AP\right) &= \det\left(P^{-1}\lambda I_2 P - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P\right) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P) \\
&= \det(\lambda I_2 - A)
\end{aligned}$$

固有多項式に関する注意 (No.2)–応用

- 正則行列 P により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ と対角化できたとします.

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-\gamma & 0 \\ 0 & \lambda-\delta \end{vmatrix} = (\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)$$

固有多項式に関する注意 (No.3)–応用

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ は対角化できない。
- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ から、A が対角化可能ならば

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{これは矛盾}$$

固有多項式に関する注意 (No.4)–応用

定理 $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

とする.
(i) $\alpha \neq \beta$ ならば A は対角化可能
(ii) $\alpha = \beta$ で A が対角化できるならば

$$A = \alpha I_2$$

Cayley-Hamilton の定理

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A^2 - (a+d)A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$$

- 具体例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$

$$A^2 - (5 + (-1))A + 5 \cdot (-1)I_2 = O_2$$

$$\to A(A + I_2) = 5(A + I_2), \quad A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2)$$

$$\to A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2), \quad A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$$\to 6A^n = 5^n(A + I_2) - (-1)^n(A - 5I_2)$$

Cayley-Hamilton の定理–その応用

- 2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有値が $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ で $\alpha \neq \beta$ とする：

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\to A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$

Cayley-Hamilton の定理–A^n について

以下の定理は応用上重要である．

定理
2 次正方行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ の固有値が $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ で $\alpha \neq \beta$ とする． $X_0, X_1 \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$A^n = \alpha^n X_0 + \beta^n X_1$$