2 次直交行列

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V02 経済数学入門，2019 年 05 月 27 日 at HC
V03 LA 2021 年 10 月 27 日 L04

内積を保つ行列

- 2 次正方行列

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix}$$

- P は内積を保つ

$$(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2)$$

この条件は

$$^tPP = I_2$$

と必要十分である。

準備

- すべてのベクトルに直交するベクトルは

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \ (\vec{x} \in \mathrm{R}^n) \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

- A $m \times n$ 行列とすると

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (\vec{x} \in \mathrm{R}^n) \Leftrightarrow A = 0_{m,n}$$

必要十分であるのは

-

$$\begin{aligned}
(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) &\Leftrightarrow ({}^tPP\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \\
&\Leftrightarrow ({}^tPP\vec{x} - \vec{x}, \vec{y}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (({}^tPP - I_2)\vec{x}, \vec{y}) = 0
\end{aligned}$$

- これが任意の $\vec{y} \in \mathrm{R}^2$ で成立するから

$$({}^tPP - I_2)\vec{x} = \vec{0}$$

- これが任意の $\vec{x} \in \mathrm{R}^2$ で成立するから

$${}^tPP = I_2$$

- $P = (\vec{a}\ \vec{b})$ が $^tPP = I_2$ を満たすとき

$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- これから $^tPP = I_2$ は

$$||\vec{a}||^2 = ||\vec{b}||^2 = 1,\ (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

と必要十分である。

$||\vec{a}||^2 = ||\vec{b}||^2 = 1,\ (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ OR } \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

- $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ は $y = \tan\frac{\theta}{2}x$ に関する折り返し

まとめ

- 次の同値な条件を満たすとき $P = (\vec{a}\ \vec{b})$ を直交行列という

$$
\begin{aligned}
(P\vec{x}, P\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{R}^2) &\overset{(*)}{\iff} ||P\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad (\vec{x} \in \mathrm{R}^2) \\
&\iff {}^tPP = P^tP = I_2 \\
&\iff ||\vec{a}||^2 = ||\vec{b}||^2 = 1,\ (\vec{a}, \vec{b}) = 0
\end{aligned}
$$

- 注意　$(*)$ において

$$
(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2\right)
$$

を用います.