

実 2 次対称行列の対角化

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

May 2019 for emath
V03 Oct 2020 for CalcNT

実2次実対称行列の固有方程式

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2\end{aligned}$$

- 2次方程式 $\Phi_A(\lambda) = 0$ の判別式 (discriminant)

$$D = (a + b)^2 - 4(ab - c^2) = (a - b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

2次実対称行列の固有方程式 (No. 2)

- **定理** 2次実対称行列の固有値は実数である。
- **注意** $D = 0$ のとき

$$a = b, c = 0 \quad \text{従って} \quad A = aI_2$$

- 以下 $D > 0$ とする。 $\Phi_A(\lambda) = 0$ の2解を α と β として

$$\alpha \neq \beta$$

- このとき

$$\alpha + \beta = a + b, \quad \alpha\beta = ab - c^2 = \det(A)$$

具体例(1)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

なので A の固有ベクトルは $\lambda = 1, 6$

$\lambda = 1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例(2)

$\lambda = 6$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

ここで

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると R は回転行列で

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ 6\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

から $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と回転行列 R を用いて対角化できます。

$\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル (準備)

- 定理 $B \in M_2(\mathbf{R})$ とする。このとき $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(B\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})$$

- (証明)

$$\begin{aligned}(B\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2, \vec{y}) = x_1(\vec{b}_1, \vec{y}) + x_2(\vec{b}_2, \vec{y}) \\ &= x_1 {}^t\vec{b}_1\vec{y} + x_2 {}^t\vec{b}_2\vec{y} = \left(\vec{x}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix} \right) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})\end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル

- 定理 $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$ 、 $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ ならば

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

- (証明) ${}^tA = A$ だから $(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, A\vec{p}_2)$

$$(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$(\vec{p}_1, A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \beta\vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \rightarrow (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

実対称行列は回転行列で対角化可能

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$ 、 $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ 、 $\vec{p}_i \neq \vec{0} (i = 1, 2)$ とする。

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2\|} \vec{p}_2$$

とすると

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0, \quad \|\vec{q}_1\| = \|\vec{q}_2\| = 1$$

- $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ とするとき

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

実対称行列は回転行列で対角化可能 (No.2)

- $(\vec{q}_1 \ \vec{q}_2)$ または $(\vec{q}_1 \ -\vec{q}_2)$ は回転行列である。
- **定理** 2次対称行列 A は回転行列で対角化可能である。すなわち、回転行列 R が存在して

$$AR = R \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

具体例(3)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ は回転行列 $R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で

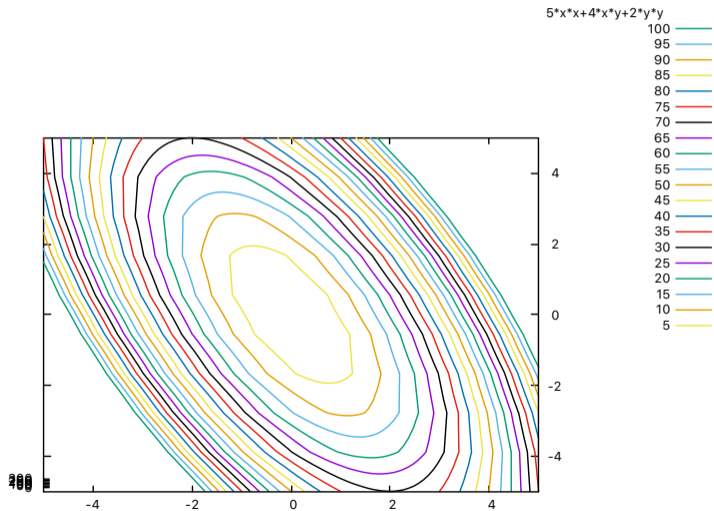
$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化可能であったので,

$$\begin{aligned} (A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (R^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (R^{-1}AR \cdot R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 + 6\eta^2 \end{aligned}$$

ここで回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ を用いました.

具体例 (4)—等高線 plot



2次形式の標準形

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が定める2次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

- R^{-1} が回転行列で、内積を保つから

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(R^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(R^{-1} A R \cdot R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

2次形式の標準形 (No.2)

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$$



$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 \end{aligned}$$

- 2次形式の正定値性（負定値性）

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta > 0$$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \ (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \alpha, \beta < 0$$

- 正定値性について (\Rightarrow) $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ のとき

$$(A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \cdot \|\vec{r}_1\|^2 = \alpha > 0$$

$$(A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \cdot \|\vec{r}_2\|^2 = \beta > 0$$

2次形式の正定値性 (No.2)

- 正定値性について (\Leftrightarrow) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に注意。

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

さらに

$$\begin{aligned} \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = 0 &\rightarrow \alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0 \\ &\rightarrow \xi = \eta = 0 \rightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

- **N.B.** $A, B \geq 0$ のとき

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

2次形式の正定値性 (No.3)

- 正定値性を A の係数で判定する

$$\alpha, \beta > 0 \Leftrightarrow a > 0, \det(A) = ab - c^2 > 0$$

$$\alpha, \beta < 0 \Leftrightarrow a < 0, \det(A) = ab - c^2 > 0$$

- (注意) $a + b = \alpha + \beta$ と $\alpha\beta = ab - c^2$
- (注意) $\alpha, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$
- (正定値性) (\Rightarrow)

$$ab - c^2 = \alpha\beta > 0 \rightarrow ab > 0$$

$$a + b = \alpha + \beta > 0 \rightarrow a + b > 0 \rightarrow a, b > 0$$

2次形式の正定値性 (No.4)

- (正定値性) (\Leftrightarrow)

$$ab - c^2 > 0 \rightarrow ab > 0$$

$$a > 0, ab > 0 \rightarrow b > 0$$

$$\alpha + \beta = a + b > 0$$

$$\alpha\beta = ab - c^2 > 0$$

- 注意 $\det(A) = ab - c^2 < 0$ のとき $\alpha\beta < 0$