

# 実 2 次対称行列の対角化

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

May 2019 for emath

V03 Oct 2020 for CalcNT; V04 Jul 30 2021 for SLIN

V05 Nov 05 2022 for LA

## 実2次実対称行列の固有方程式

- 2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  の固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2\end{aligned}$$

- 2次方程式  $\Phi_A(\lambda) = 0$  の判別式 (discriminant)

$$D = (a + b)^2 - 4(ab - c^2) = (a - b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

## なぜ対称行列—2次形式

実対称行列  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  に対して

$$\begin{aligned} \left( \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( \begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= x(ax + cy) + y(cx + by) \\ &= ax^2 + 2cxy + by^2 \end{aligned}$$

を  $A$  が定める 2 次形式と呼びます。

**補足問題**

$$\left( \begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

を展開しましょう。

## 2次実対称行列の固有方程式 (No. 2)

- **定理** 2次実対称行列の固有値は実数である。
- **注意**  $D = 0$  のとき

$$a = b, c = 0 \quad \text{従って} \quad A = aI_2$$

- 以下  $D > 0$  とする。 $\Phi_A(\lambda) = 0$  の2解を  $\alpha$  と  $\beta$  として

$$\alpha \neq \beta$$

- このとき

$$\alpha + \beta = a + b, \quad \alpha\beta = ab - c^2 = \det(A)$$

## 具体例(1)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

なので  $A$  の固有値は  $\lambda = 1, 6$

$\lambda = 1$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

## 具体例(2)

$\lambda = 6$  のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

なので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

ここで

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると  $R$  は回転行列で

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ 6\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

から  $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$  と回転行列  $R$  を用いて対角化できます。

# 復習：回転行列

2次正方行列

$$R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

を**回転行列**と呼ぶ.

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}) \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2)$$

は見えるか？

他方

$$Q = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

は原点を通る直線  $y = (\tan \frac{\theta}{2})x$  に関する折り返しであった.

## $\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル (準備)

- 定理  $B \in M_2(\mathbf{R})$  とする。このとき  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2$  に対して

$$(B\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})$$

- (証明)

$$\begin{aligned}(B\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2, \vec{y}) = x_1(\vec{b}_1, \vec{y}) + x_2(\vec{b}_2, \vec{y}) \\ &= x_1 {}^t\vec{b}_1\vec{y} + x_2 {}^t\vec{b}_2\vec{y} = \left( \vec{x}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1\vec{y} \\ {}^t\vec{b}_2\vec{y} \end{pmatrix} \right) = (\vec{x}, {}^tB\vec{y})\end{aligned}$$



## $\alpha \neq \beta$ のときの固有ベクトル

- **定理**  $A \in M_2(\mathbf{R})$  が対称:  ${}^tA = A$  で相異なる固有値  $\alpha, \beta$  を持つとする:  $\alpha \neq \beta$   
このとき  $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$ ,  $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$  ならば

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

- (証明)  ${}^tA = A$  だから  $(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\vec{p}_1, A\vec{p}_2)$

$$(A\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$(\vec{p}_1, A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1, \beta\vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\alpha(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \beta(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \rightarrow (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

# 実対称行列は回転行列で対角化可能

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$ 、 $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ 、 $\vec{p}_i \neq \vec{0} (i = 1, 2)$  とする。

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1, \quad \vec{q}_2 = \frac{1}{\|\vec{p}_2\|} \vec{p}_2$$

とすると

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0, \quad \|\vec{q}_1\| = \|\vec{q}_2\| = 1$$

- $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  とするとき

$$\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

## 実対称行列は回転行列で対角化可能 (No.2)

- $(\vec{q}_1 \ \vec{q}_2)$  または  $(\vec{q}_1 \ -\vec{q}_2)$  は回転行列である。
- **定理** 2次対称行列  $A$  は回転行列で対角化可能である。すなわち、回転行列  $R$  が存在して

$$AR = R \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

## 具体例(3)

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  は回転行列  $R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  で

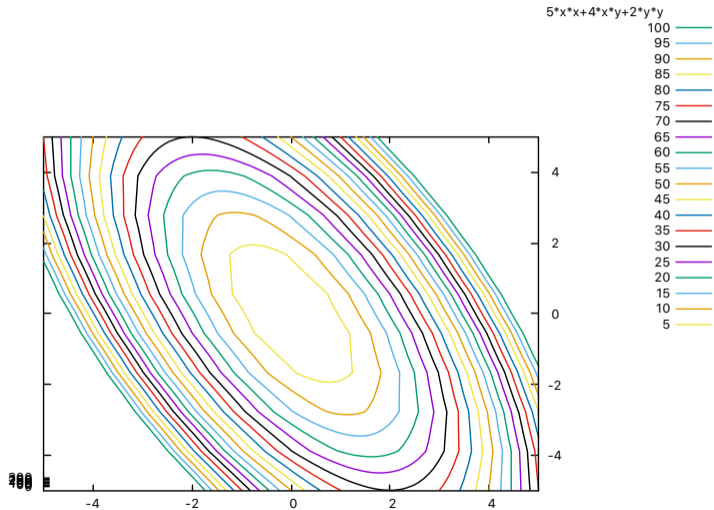
$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化可能であったので,

$$\begin{aligned} (A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (R^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (R^{-1}AR \cdot R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 + 6\eta^2 \end{aligned}$$

ここで回転座標変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  を用いました.

# 具体例 (4)—等高線 plot



## 2次形式の標準形

- 2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  が定める2次形式

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

- $R^{-1}$  が回転行列で、内積を保つから

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( R^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( R^{-1} A R \cdot R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

## 2次形式の標準形 (No.2)

- 回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r}_1 + \eta \vec{r}_2$$

- 

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 \end{aligned}$$

- 2次形式の正定値性（負定値性）

$$(i) (A\vec{v}, \vec{v}) > 0 (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow (ii) \alpha, \beta > 0$$

$$(i) (A\vec{v}, \vec{v}) < 0 (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow (ii) \alpha, \beta < 0$$

- 正定値性について ( $\Rightarrow$ )  $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$  のとき

$$(A\vec{r}_1, \vec{r}_1) = (\alpha\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \alpha \cdot \|\vec{r}_1\|^2 = \alpha > 0$$

$$(A\vec{r}_2, \vec{r}_2) = (\beta\vec{r}_2, \vec{r}_2) = \beta \cdot \|\vec{r}_2\|^2 = \beta > 0$$



## 2次形式の正定値性 (No.2)

- 正定値性について ( $\Leftrightarrow$ )  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  に注意。

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 \geq 0$$

さらに

$$\begin{aligned} \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 = 0 &\rightarrow \alpha\xi^2 = \beta\eta^2 = 0 \\ &\rightarrow \xi = \eta = 0 \rightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

- **N.B.**  $A, B \geq 0$  のとき

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = 0$$

## 2次形式の正定値性 (No.3)

- 正定値性を  $A$  の係数で判定する

$$(ii) \alpha, \beta > 0 \Leftrightarrow (iii) a > 0, \det(A) = ab - c^2 > 0$$

$$(ii) \alpha, \beta < 0 \Leftrightarrow (iii) a < 0, \det(A) = ab - c^2 > 0$$

- (注意)  $a + b = \alpha + \beta$  と  $\alpha\beta = ab - c^2$

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2 = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

- (注意) 一般に  $p, q \in \mathbf{R}$  のとき

$$p, q > 0 \Leftrightarrow p + q > 0 \text{ かつ } pq > 0$$

- (正定値性) ( $\Rightarrow$ )

$$ab - c^2 = \alpha\beta > 0 \rightarrow ab > 0$$

$$a + b = \alpha + \beta > 0 \rightarrow a + b > 0 \rightarrow a, b > 0$$

## 2次形式の正定値性 (No.5)

- (正定値性) ( $\Leftrightarrow$ )

$$ab - c^2 > 0 \rightarrow ab > 0$$

$$a > 0, ab > 0 \rightarrow b > 0$$

$$\alpha + \beta = a + b > 0$$

$$\alpha\beta = ab - c^2 > 0$$

- 注意  $\det(A) = ab - c^2 < 0$  のとき  $\alpha\beta < 0$

## 2次形式の正定値性 (No.6)—まとめ

実対称行列  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  に対して

$$(i) (A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow (ii) A \text{の固有値 } \alpha, \beta > 0 \\ \Leftrightarrow (iii) a > 0, \quad |A| > 0$$

## 2次形式の正定値性 (No.7)—補足 (1)

(i)⇒(iii)  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  のとき

$$(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = a > 0$$

となります。さらに

$$\begin{aligned} (A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= ax^2 + 2cxy + by^2 \\ &= a \left( x + \frac{c}{a}y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \end{aligned}$$

において  $\vec{v} = \vec{v}_0 := \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$  とすると

$$(A\vec{v}_0, \vec{v}_0) = \frac{ab - c^2}{a} > 0$$

となりますから  $\det(A) = ab - c^2 > 0$  が従います。

## 2次形式の正定値性 (No.8)—補足 (1)

(iii)⇒(i)  $a > 0, ab - c^2 > 0$ なので

$$\begin{aligned}(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= ax^2 + 2cxy + by^2 \\ &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0\end{aligned}$$

となります。最後の不等号の等号成立の条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

で、 $x = y = 0$ と同値です。従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Rightarrow (A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) > 0$$