2 変数の 2 次式の標準形について（その１）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 05 月 24 日 at 駒場

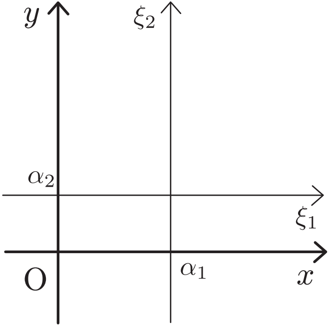
2 変数の 2 次式

- 2 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ と 2 次元行ベクトル $\beta = (d\ e)$ を用いて、2 変数の多項式を

$$\begin{aligned} F(x,y) &= ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f \\ &= (A\vec{v}, \vec{v}) + \beta\vec{v} + f \end{aligned}$$

と表示します。ただし、$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定めます。

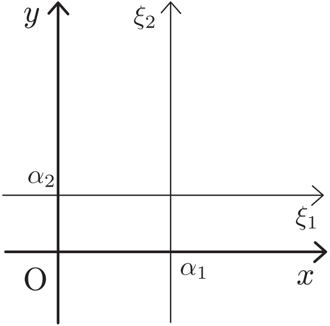
- この式を平行移動座標変換
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$
を用いて簡単にすることを考えます。



- この式を平行移動座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

を用いて簡単にすることを考えます。



- 以下では

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

座標変換の計算

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= (A(\vec{\xi}+\vec{\alpha}),(\vec{\xi}+\vec{\alpha}))+\beta(\vec{\xi}+\vec{\alpha})+f \\
&= (A\vec{\xi},\vec{\xi})+(A\vec{\alpha},\vec{\xi})+(\vec{\alpha},A\vec{\xi})+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha}) \\
&\quad +\beta\vec{\xi}+\beta\vec{\alpha}+f \\
&= (A\vec{\xi},\vec{\xi})+2(A\vec{\alpha},\vec{\xi})+\beta\vec{\xi} \\
&\quad +(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\beta\vec{\alpha}+f \\
&= (A\vec{\xi},\vec{\xi})+(2A\vec{\alpha}+{}^{t}\beta,\vec{\xi})+F(\alpha_1,\alpha_2)
\end{aligned}
$$

$|A| \neq 0$ のとき

- $2A\vec{\alpha} + {}^t\beta = \vec{0}$ すなわち

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}A^{-1}{}^t\beta$$

とすると

$$F(x, y) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2^2 + f'$$

ただし

$$f' = F(\alpha_1, \alpha_2)$$

実対称行列は回転行列で対角化可能

- A は実対称行列なので回転行列で対角化可能。回転行列 R が存在して
$$ {}^t RAR = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} $$
と対角化できます。

実対称行列は回転行列で対角化可能

- A は実対称行列なので回転行列で対角化可能。回転行列 R が存在して

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} $$

と対角化できます。

- さらに $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$ と回転座標変換をすると

$$ (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) = (AR\vec{\eta}, R\vec{\eta}) = ({}^tRAR\vec{\eta}, \vec{\eta}) = r\eta_1^2 + s\eta_2^2 $$

と変換される。よって

$$ F(x, y) = r\eta_1^2 + s\eta_2^2 + F(\alpha_1, \alpha_2) $$

となる。

具体例

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \end{pmatrix}$ の場合、すなわち

$$F(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 4y$$

の場合は

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

として $\vec{\xi} = \vec{v} - \vec{\alpha}$ と平行移動座標変換をすると

$$F(x, y) = (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) - 4$$

となります。

具体例 (No.2)

- A の固有値は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$

具体例 (No.2)

- A の固有値は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$

- $\lambda = 3$ のときは

$$A\vec{\xi} = 3\vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$$

から

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

具体例 (No.3)

- $\lambda = 1$ のときは

$$A\vec{\xi} = \vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = -\xi_2$$

から

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

具体例 (No.3)

- $\lambda = 1$ のときは

$$A\vec{\xi} = \vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = -\xi_2$$

から

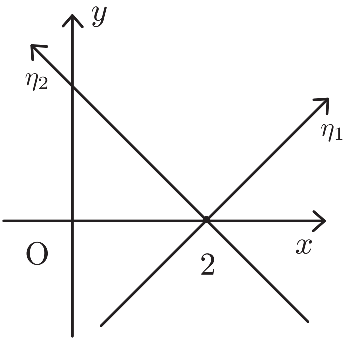
$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

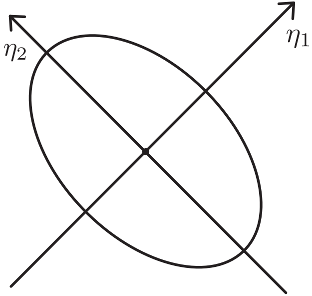
- $\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ と定めると

$$AR = R \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- このとき $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$ と定めると

$$F(x,y) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\eta}, \vec{\eta} \right) - 4 = 3\eta_1^2 + \eta_2^2 - 4$$





$|A| \neq 0$ のときの等高線 $F(x,y) = C$

- $|A| = rs > 0$ のときは楕円、1 点、空集合が出てくる

$|A| \neq 0$ のときの等高線 $F(x,y)=C$

- $|A| = rs > 0$ のときは楕円、1 点、空集合が出てくる
- $|A| = rs < 0$ のときは双曲線（例外的に、2 直線）が出てくる

$|A| = 0$ のときの等高線

- $|A| = rs = 0$ のとき、$r \neq 0,\ s = 0$ の場合
  （注意）$r = s = 0$ のときは $A = 0$ となる

$|A| = 0$ のときの等高線

- $|A| = rs = 0$ のとき、$r \neq 0,\ s = 0$ の場合
  （注意）$r = s = 0$ のときは $A = 0$ となる
- ある回転行列 R に対して

$$AR = R \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。$\vec{v} = R\vec{\xi}$ とすると

$$F(x, y) = r\xi_1^2 + \mathbf{b}R\vec{\xi} + f$$

ここで $\mathbf{b}R = (d' \ e')$ とすると

$$F(x, y) = r\xi_1^2 + d'\xi_1 + e'\xi_2 + f$$

$|A| = 0$ のときの等高線

- $e' \neq 0$ のときの等高線は、軸が ξ_2 軸に平行な放物線

$|A| = 0$ のときの等高線

- $e' \neq 0$ のときの等高線は、軸が ξ_2 軸に平行な放物線
- $e' = 0$ のときの ξ_2 軸に平行な 2 直線、1 直線、または空集合