2 変数の 2 次式の標準形について（その１）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V02 2011 年 05 月 24 日 at 駒場
V03 2019 年 09 月 23 日 at HC, intro
V04 2021 年 11 月 10 日　at HC, LA L06

2 変数の 2 次式

- 2 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ と 2 次元ベクトル $\vec{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} d \\ e \end{smallmatrix}\right)$ を用いて，2 変数の多項式を

$$\begin{aligned} F(x, y) &= ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f \\ &= (A\vec{v}, \vec{v}) + (\vec{\beta}, \vec{v}) + f \end{aligned}$$

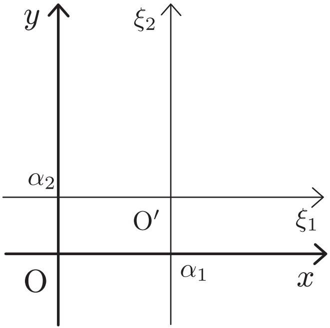
と表示します。ただし $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定めます。

平行移動座標変換

- この式を平行移動座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

を用いて簡単にすることを考えます。



- 以下では

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

座標変換の計算

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= (A(\vec{\xi}+\vec{\alpha}),(\vec{\xi}+\vec{\alpha}))+(\vec{\beta},(\vec{\xi}+\vec{\alpha}))+f \\
&= (A\vec{\xi},\vec{\xi})+(A\vec{\alpha},\vec{\xi})+(\vec{\alpha},A\vec{\xi})+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha}) \\
&\quad +(\vec{\beta},\vec{\xi})+(\vec{\beta},\vec{\alpha})+f \\
&= (A\vec{\xi},\vec{\xi})+2(A\vec{\alpha},\vec{\xi})+(\vec{\beta},\vec{\xi}) \\
&\quad +(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{\beta},\vec{\alpha})+f \\
&= (A\vec{\xi},\vec{\xi})+(2A\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\xi})+F(\alpha_1,\alpha_2)
\end{aligned}
$$

$|A| \neq 0$ のとき

- $2A\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}$ すなわち

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{\beta}$$

とすると

$$F(x, y) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2^2 + f'$$

ただし

$$f' = F(\alpha_1, \alpha_2)$$

実対称行列は回転行列で対角化可能

- A は実対称行列なので回転行列で対角化可能。回転行列 R が存在して

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} $$

と対角化できます。

- さらに $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$ と回転座標変換をすると

$$ (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) \quad = \quad (AR\vec{\eta}, R\vec{\eta}) = ({}^tRAR\vec{\eta}, \vec{\eta}) = r\eta_1^2 + s\eta_2^2 $$

と変換されます。よって

$$ F(x, y) = r\eta_1^2 + s\eta_2^2 + F(\alpha_1, \alpha_2) $$

となります。

具体例

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} -8 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ の場合、すなわち

$$F(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 4y$$

の場合は

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

として $\vec{\xi} = \vec{v} - \vec{\alpha}$ と平行移動座標変換をすると

$$F(x, y) = (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) - 8$$

となります。

具体例 (No.2)

- A の固有値は
$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$
から A の固有値は $\lambda = 1, 3$
- $\lambda = 3$ のときは
$$A\vec{\xi} = 3\vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$$
から
$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

具体例 (No.3)

- $\lambda = 1$ のときは

$$A\vec{\xi} = \vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = -\xi_2$$

から

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

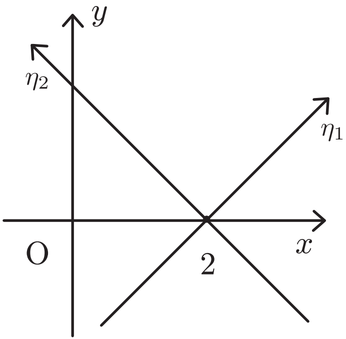
- $\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ と定めると R は回転行列で

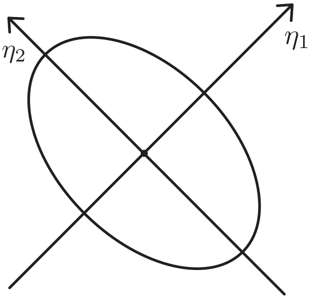
$$AR = R \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

具体例 (No.4)

- このとき $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$ と定めると

$$F(x,y) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\eta}, \vec{\eta} \right) - 8 = 3\eta_1^2 + \eta_2^2 - 8$$





$|A| \neq 0$ のときの等高線 $F(x,y)=C$

- $|A| = rs > 0$ のときは楕円、1 点、空集合が出てくる
- $|A| = rs < 0$ のときは双曲線（例外的に、2 直線）が出てくる

$|A|=0$ のときの等高線 $F(x,y)=0$（その1）

- $|A| = rs = 0$ のとき、$r \neq 0,\ s = 0$ の場合
  （注意）$r = s = 0$ のときは $A = 0$ となります.
- ある回転行列 R に対して

$$AR = R\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と対角化できます。$\vec{v} = R\vec{\xi}$ とすると

$$F(x,y) = r\xi_1^2 + ({}^t R\vec{\beta}, \vec{\xi}) + f$$

ここで ${}^t R\vec{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} d' \\ e' \end{smallmatrix}\right)$ とすると

$$F(x,y) = r\xi_1^2 + d'\xi_1 + e'\xi_2 + f$$

$|A| = 0$ のときの等高線 $F(x, y) = 0$（その 2）

- $e' \neq 0$ のときの等高線 $F(x, y) = 0$ は、軸が ξ_2 軸に平行な放物線
  実際

$$r\xi_1^2 + d'\xi_1 + e'\xi_2 + f = 0$$

は

$$\begin{aligned} \xi_2 &= -\frac{r}{e'}\xi^2 - \frac{d'}{d'}\xi - \frac{f}{e'} \\ &= -\frac{r}{e'}\left(\xi_1 + \frac{d'}{2r}\right)^2 - \frac{f}{e'} + \frac{d'^2}{4e'r} \\ &= \frac{r}{e'}\left(\xi_1 + \frac{d'}{2r}\right)^2 - \frac{4rf - d'^2}{4e'r} \end{aligned}$$

- $e'=0$ のとき ξ_2 軸に平行な 2 直線、1 直線、または空集合
  実際

$$r\xi_1^2+d'\xi_1+f=0 \iff \xi_1^2+\frac{d'}{r}\xi_1+\frac{f}{r}=0$$
$$\iff \left(\xi_1+\frac{d'}{2r}\right)^2+\frac{4rf-d'^2}{4r^2}=0$$