

2変数の2次式の標準形について（その1）

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

V02 2011年05月24日 at 駒場

V03 2019年09月23日 at HC, intro

V04 2021年11月10日 at HC, LA L06

V04b 2021年11月18日（講義後修正）

- 2次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ と2次元ベクトル $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ を用いて、2変数の多項式を

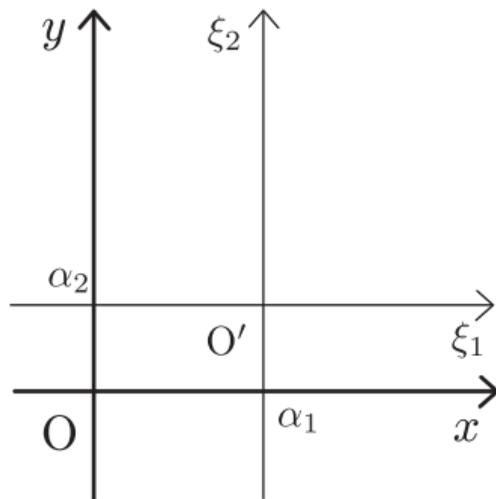
$$\begin{aligned} F(x, y) &= ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f \\ &= (A\vec{v}, \vec{v}) + (\vec{\beta}, \vec{v}) + f \end{aligned}$$

と表示します。ただし $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と定めます。

この式を平行移動座標変換

- $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

を用いて簡単にすることを考えます。



- 以下では

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}F(x, y) &= (A(\vec{\xi} + \vec{\alpha}), (\vec{\xi} + \vec{\alpha})) + (\vec{\beta}, (\vec{\xi} + \vec{\alpha})) + f \\&= (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) + (A\vec{\alpha}, \vec{\xi}) + (\vec{\alpha}, A\vec{\xi}) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \\&\quad + (\vec{\beta}, \vec{\xi}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \\&= (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) + 2(A\vec{\alpha}, \vec{\xi}) + (\vec{\beta}, \vec{\xi}) \\&\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f \\&= (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) + (2A\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\xi}) + F(\alpha_1, \alpha_2)\end{aligned}$$

- $2A\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}$ すなわち

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{\beta}$$

とすると

$$F(x, y) = a\xi_1^2 + 2c\xi_1\xi_2 + b\xi_2^2 + f'$$

ただし

$$f' = F(\alpha_1, \alpha_2)$$

- A は実対称行列なので回転行列で対角化可能。回転行列 R が存在して

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

と対角化できます。

- さらに $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$ と回転座標変換をすると

$$(A\vec{\xi}, \vec{\xi}) = (AR\vec{\eta}, R\vec{\eta}) = ({}^tRAR\vec{\eta}, \vec{\eta}) = r\eta_1^2 + s\eta_2^2$$

と変換されます。よって

$$F(x, y) = r\eta_1^2 + s\eta_2^2 + F(\alpha_1, \alpha_2)$$

となります。

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ の場合、すなわち

$$F(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8x - 4y$$

の場合は

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

として $\vec{\xi} = \vec{v} - \vec{\alpha}$ と平行移動座標変換をすると

$$F(x, y) = (A\vec{\xi}, \vec{\xi}) - 8$$

となります。

- A の固有値は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$

- $\lambda = 3$ のときは

$$A\vec{\xi} = 3\vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2$$

から

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 1$ のときは

$$A\vec{\xi} = \vec{\xi} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \xi_1 = -\xi_2$$

から

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

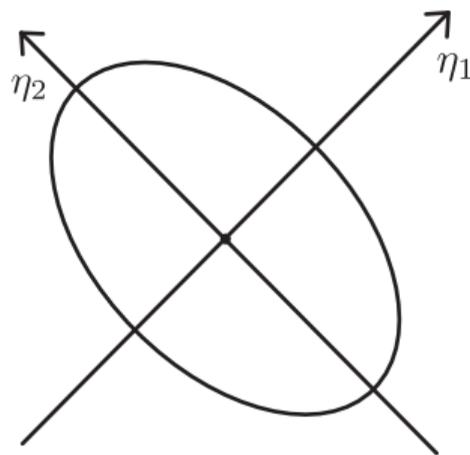
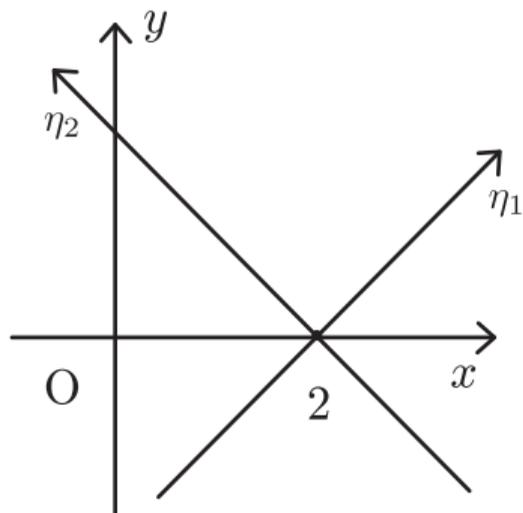
- $\vec{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $R = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$ と定めると R は回転行列で

$$AR = R \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

具体例 (No.4)

- このとき $\vec{\xi} = R\vec{\eta}$ と定めると

$$F(x, y) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\eta}, \vec{\eta} \right) - 8 = 3\eta_1^2 + \eta_2^2 - 8$$



$|A| \neq 0$ のときの等高線 $F(x, y) = C$

- $|A| = rs > 0$ のときは楕円、1点、空集合が出てくる
- $|A| = rs < 0$ のときは双曲線（例外的に、2直線）が出てくる

$|A| = 0$ のときの等高線 $F(x, y) = 0$ (その1)

- $|A| = rs = 0$ のとき、 $r \neq 0, s = 0$ の場合
(注意) $r = s = 0$ のときは $A = 0$ となります.
- ある回転行列 R に対して

$$AR = R \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と対角化できます。 $\vec{v} = R\vec{\xi}$ とすると

$$F(x, y) = r\xi_1^2 + ({}^tR\vec{\beta}, \vec{\xi}) + f$$

ここで $({}^tR\vec{\beta} = \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix})$ とすると

$$F(x, y) = r\xi_1^2 + d'\xi_1 + e'\xi_2 + f$$

$|A| = 0$ のときの等高線 $F(x, y) = 0$ (その2)

- $e' \neq 0$ のときの等高線 $F(x, y) = 0$ は、軸が ξ_2 軸に平行な放物線
実際

$$r\xi_1^2 + d'\xi_1 + e'\xi_2 + f = 0$$

は

$$\begin{aligned}\xi_2 &= -\frac{r}{e'}\xi_1^2 - \frac{d'}{e'}\xi_1 - \frac{f}{e'} \\ &= -\frac{r}{e'}\left(\xi_1 + \frac{d'}{2r}\right)^2 - \frac{f}{e'} + \frac{d'^2}{4e'r} \\ &= -\frac{r}{e'}\left(\xi_1 + \frac{d'}{2r}\right)^2 - \frac{4rf - d'^2}{4e'r}\end{aligned}$$

- $e' = 0$ のときの ξ_2 軸に平行な 2 直線、1 直線、または空集合
実際

$$\begin{aligned} r\xi_1^2 + d'\xi_1 + f = 0 &\iff \xi_1^2 + \frac{d'}{r}\xi_1 + \frac{f}{r} = 0 \\ &\iff \left(\xi_1 + \frac{d'}{2r}\right)^2 + \frac{4rf - d'^2}{4r^2} = 0 \end{aligned}$$