対角化できない3次正方行列

前提　$A \in M_3(\mathbb{K})$ で固有値はすべて $\mathbb{K}$ に属するとします。

このとき　$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ で

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

が成立するとして

(I)　$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$

(II)　$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$

(III)　$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$

の3通りの場合があります。

(I) の場合　　Aは必ず対角化できます。

(II) の場合.　A が対角化可能 $\iff (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)=O_3$

$$\iff \dim V(\alpha)=2$$

に注意します. A が対角化できない場合.

$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\neq O_3.$$

$$\dim V(\alpha)=1,\quad \dim V(\beta)=1$$

が成立します.

$$d_1(\lambda)=-\frac{\lambda-(2\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2},\quad d_2(\lambda)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$$

とすると

$$1=d_1(\lambda)(\lambda-\beta)+d_2(\lambda)(\lambda-\alpha)^2$$

が成立します.

$$P_1 = d_1(A)(A-\beta I_3), \quad P_2 = d_2(A)(A-\alpha I_3)^2$$

とすると

$$I_3 = P_1 + P_2 \qquad (*)$$

となります. C-H の定理から $(A-\alpha I_3)^2(A-\beta I_3) = O_3$ となりますから

$$P_1P_2 = d_1(A)d_2(A)(A-\beta I_3)(A-\alpha I_3)^2 = O_3$$

(*) に P_1 を左からかけると
(resp. P_2)

$$P_1 = P_1^2 + P_1P_2 = P_1^2, \quad P_2^2 = P_2P_1 + P_2^2 = P_2^2$$

$$\boxed{I_3 = P_1 + P_2, \quad P_iP_j = \begin{cases} P_i & i=j \\ O_3 & i \neq j \end{cases}}$$

$I_3 = P_1 + P_2$ から

$$\mathbb{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) + \mathrm{Im}(P_2)$$

さらに

$$\mathbb{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2)$$

となります. $\vec{w}_1 = P_1 \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = P_2 \vec{v}_2$ が $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{0}$ i.e. $P_1\vec{v}_1 + P_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

を満たすとすると P_1・とすると $P_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$ i.e. $\vec{w}_1 = \vec{0}$ 従って $\vec{w}_2 = \vec{0}$.

さらに　C-H から　$\vec{w}_1 \in \mathrm{Im}(P_1)$ は $\vec{w}_1 = d_1(A)(A-\beta I_3)\vec{v}_1$ と書けて

$$(A-\alpha I_3)^2 \vec{w}_1 = d_1(A)(A-\alpha I_3)^2 (A-\beta I_3)\vec{v}_1 = d_1(A) O_3 \vec{v}_1 = \vec{0}$$

が成立するので

$$\mathrm{Im}(P_1) \subset W(\alpha) := \mathrm{Ker}\left((A-\alpha I_3)^2\right)$$

同様に

$$\mathrm{Im}(P_2) \subset W(\beta) = V(\beta)$$

部分

$$\mathbb{K}^3 = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2) \subset W(\alpha) \oplus W(\beta) \subset \mathbb{K}^3$$

から

$$\mathrm{Im}(P_1) = W(\alpha), \quad \mathrm{Im}(P_2) = W(\beta) = V(\beta)$$

$$W(\alpha) \oplus V(\beta) = \mathbb{K}^3$$

が従います.（一般固有空間分解）

$\dim W(\alpha) = 2$

ここで $\forall \vec{v} \in W(\alpha)$ に対して $(A - \alpha I_3)\vec{v} = \vec{0}$ とすると $\dim V(\alpha) = 2$

となるので A は対角化可能となります. 従って $\exists \vec{q}_1 \in W(\alpha)$

$$\vec{q}_2 := (A - \alpha I_3)\vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

となります. $\vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2$ を示して $W(\alpha)$ の基底が $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ であることが

分かります. さらに $(A - \alpha I_3)\vec{q}_2 = (A - \alpha I_3)^2 \vec{q}_1 = \vec{0}$

（$\vec{q}_1 \in W(\alpha)$ に注）

$V(\beta)$ は1次元で $\vec{q}_3 \in V(\beta)$, $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ である $\vec{q}_3$ をとります。ここで

$$Q = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3)$$

とすると Q は正則で

$$AQ = (A\vec{q}_1 \ A\vec{q}_2 \ A\vec{q}_3) = (\alpha\vec{q}_1 + \vec{q}_2 \ \ \alpha\vec{q}_2 \ \ \beta\vec{q}_3)$$

$$= (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

から

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

となります。（A の Jordan 標準形）

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ のとき. C-H の定理から $(A - \alpha I_3)^3 = O_3$

さらに「A が対角化可能 $\Longleftrightarrow$ $A = \alpha I_3$」であることも分かります.

(i) $(A - \alpha I_3)^2 \neq O_3$ のとき. $\exists \vec{q}_1 \in \mathbb{K}^3$ に対して

$$\vec{q}_3 := (A - \alpha I_3)^2 \vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

が成立します. $\vec{q}_2 := (A - \alpha I_3)\vec{q}_1$ とすると $\vec{q}_3 = (A - \alpha I_3)\vec{q}_2$ で

$$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3 \text{ は LI}$$

であることが分かります. $(A - \alpha I_3)^3 = O_3$ から $(A - \alpha I_3)\vec{q}_3 = (A - \alpha I_3)^3 \vec{q}_1 = \vec{0}$

となるので

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

から $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ とすると

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

となります.

(ii) $(A-\alpha I_3)^2 = O_3$ のとき. $\mathbb{K}^3$ の基底を $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とします.

$$(A-\alpha I_3)\vec{p}_1 \neq \vec{0},\ (A-\alpha I_3)\vec{p}_2 \neq \vec{0}$$

とすると $\vec{p}_1, (A-\alpha I_3)\vec{p}_1, \vec{p}_2, (A-\alpha I_3)\vec{p}_2$ が LI となります. これは, $\mathbb{K}^3$ が 3次元なので成立しません. よって高々1本の $\vec{p}_j$ が

$$(A-\alpha I_3)\vec{p}_j \neq \vec{0}$$

を満たします. もしも1本もないと $\ker(A-\alpha I_3) = \mathbb{K}^3$ から $A = \alpha I_3$ となります. 従って1本が必ず条件を満たします. 以下

$$\vec{q}_2 := (A-\alpha I_3)\vec{p}_1 \neq \vec{0}$$

が成立するとします. $\vec{p}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ を $\mathbb{K}^3$ の基底をとります. このとき $(A-\alpha I_3)\vec{q}_3 = \vec{0}$ となります. これから

$$A(\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

から

$$(\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)^{-1} A (\vec{p}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$