C−Hの定理

$A \in M_3(\mathbb{R})$ に対して　$\Phi_A(A) = O_3$

(証明)　$\widetilde{(\lambda I_3 - A)} = B(\lambda)$ とします．各成分は高々 λ の2次式ですから

$$B(\lambda) = B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0$$

と表現されます．

$$(\lambda I_3 - I_3)\,B(\lambda) = \Phi_A(\lambda)\,I_3$$

となります．各次数について両辺の係数を比較します．ここで

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

を用いると

λ^3 $k=3$ $B_2 = I_3$ (3)

λ^2 $k=2$ $B_1 - AB_2 = a_2 I_3$ (2)

λ $k=1$ $B_0 - AB_1 = a_1 I_3$ (1)

定数項 $k=0$ $-AB_0 = a_0 I_3$ (0)

$$A^3 \times (3) + A^2 \times (2) + A \times (1) + I_3 \times (0)$$

を考える.

$$右辺 = A^3 + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_3 = \Phi_A(A)$$

$$左辺 = A^3 \cdot B_2 + A^2 (B_1 - AB_2) + A(B_0 - AB_1) - AB_0 = O_3$$

から

$$\Phi_A(A) = O_3$$