

3次元固有値問題 (1)

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

EV03c 2020年10月05,06日 at HC, 経済数学入門・経済数学

EV04a 2021年11月 at HC, 線形代数続論・経済数学入門

EV05 2022年11月 at HC 線形代数続論 (L09?)

$$M_3(\mathbf{K}) = \{A; \text{3次正方行列}\}$$

以下の定理は線型代数の基本である.

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.

- (1) A は正則である.
- (2) $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \vec{0}$ ならば $\vec{v} = \vec{0}$
- (2)' $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は1次独立である.
- (3) $f_A: \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$ は単射である.
- (4) $f_A: \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K}^3$ は全射である.
- (5) $\det(A) \neq 0$
- (6) $A \rightarrow \cdots \rightarrow I_3$ と行基本変形できる.

復習 (2)

定義 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して任意の $x, x' \in X$ に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するならば f は**単射**であるといいます。

前ページの定理にある $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (5)$ は前期で学んだはずである。

$(3) \Rightarrow (4)$ を示そう。

$f_A(\vec{v}) = f_A(\vec{w})$ とすると

$$f_A(\vec{v} - \vec{w}) = f_A(\vec{v}) - f_A(\vec{w}) = \vec{0}$$

となる。 $A(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$ となるが (3) を用いると

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \quad \text{従って} \quad \vec{v} = \vec{w}$$

復習 (3)

(4) \Rightarrow (3) を示そう.

$A\vec{v} = \vec{0}$ とする. $A\vec{0} = \vec{0}$ なので

$$A\vec{v} = A\vec{0} \quad \text{すなわち} \quad f_A(\vec{v}) = f_A(\vec{0})$$

が従うが, (4) から $\vec{v} = \vec{0}$ となる.

復習 (4)

定義 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられているとします.

$$\forall y \in Y \text{ に対して } \exists x \in X \quad f(x) = y$$

が成立するならば f は**全射**であるといいます.

(1) \Rightarrow (4) を示します.

$\forall \vec{w} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$A(A^{-1}\vec{w}) = AA^{-1}\vec{w} = I_3\vec{w} = \vec{w}$$

から $\vec{v} := A^{-1}\vec{w}$ が $f_A(\vec{v}) = \vec{w}$ を満たします.

復習 (5)

(4) \Rightarrow (5) を示します. (4) を用いると

$$f_A(\vec{v}_1) = \vec{e}_1, \quad f_A(\vec{v}_2) = \vec{e}_2, \quad f_A(\vec{v}_3) = \vec{e}_3$$

すなわち

$$A\vec{v}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{v}_2 = \vec{e}_2, \quad A\vec{v}_3 = \vec{e}_3$$

これは

$$A(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = I_3$$

を意味します. この最左辺と最右辺の行列式を考えると

$$\det(A) \cdot |\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3| = \det(I_3) = 1 \neq 0$$

から $\det(A) \neq 0$ が従います.

復習 (6)

Theorem

定理 $A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.

(1) A は正則である.

(2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(5) $\det(A) \neq 0$

特に

$$\exists \vec{v} \in \mathbf{K}^3 \ A\vec{v} = \vec{0}, \ \vec{v} \neq \vec{0} \iff \det(A) = 0$$

3次元の固有値問題

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とする. このとき $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して

$$\begin{aligned} A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{ を満たす } \vec{v} (\neq \vec{0}) \in \mathbf{K}^3 \text{ が存在する} \\ \Leftrightarrow \det(\alpha I_3 - A) = 0 \end{aligned}$$

- $\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A) \in \mathbf{K}[\lambda]$ を A の固有多項式と呼ぶ.
- $A = (a_{ij})$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + C\lambda - \det(A)$$

- **問題** これはなぜか. C は求まるか. (3次行列式に関する別の Presentation で説明)

固有多項式の性質

- $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\text{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

を A のトレース (trace) と呼ぶ.

- **定理** P が正則な 3 次正方行列であるとする

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

- **証明**

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_3P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I_3 - A)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I_3 - A) \det(P)\end{aligned}$$

- 系

$$\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(A)$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

- 定理 複素係数の多項式

$$f(\lambda) = \lambda^\ell + a_{\ell-1}\lambda^{\ell-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbf{C}[\lambda]$$

は

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_\ell)$$

と1次式の積に分解できる ($\alpha_j \in \mathbf{C}$).

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

と因数分解できる. ただし $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$.

定理 1 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ とする. このとき

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

ならば正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP$$

を対角行列とできる.

定理 1 の証明 (1)—定理 2

定理 2 $A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が以下の条件を満たすとします.

$$\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

このとき $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$ は正則となります.

定理 1 の証明 (2)—定理 2 の証明

$$c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 + c_3 \vec{p}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

とします. (1) の両辺に $A - \gamma I_3$ を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)\vec{p}_1 + c_2(\beta - \gamma)\vec{p}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

さらに (2) の両辺に $A - \beta I_3$ を掛けると

$$c_1(\alpha - \gamma)(\alpha - \beta)\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$\vec{p}_1 \neq 0$ から $c_1 = 0$ が従う.

定理 1 の証明 (3)

定理 1 の状況で, ある $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在して

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \quad A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3, \quad \vec{p}_1 \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_3 \neq \vec{0}$$

が成立します.

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1 \ \beta\vec{p}_2 \ \gamma\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで定理 2 から P が正則であることが分かりますから, 定理 1 が証明されます.

具体例 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ を対角化します. (確認問題)}$$

具体例(2)—固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ であることが分かります。

具体例(3)—固有ベクトル

(i) $\lambda = -1$ のとき行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#1)$$

であることが分かります。さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = z, y = 0$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります。

具体例(4)—固有ベクトル

(ii) $\lambda = 1$ のとき 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#2)$$

において

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#2) \Leftrightarrow x - 3z = 0, \quad y - 2z = 0$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります。

具体例(5)—固有ベクトル

(iii) $\lambda = 2$ のとき 固有多項式を求めるために用いた行基本変形を用いると

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (\#3)$$

において

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形できますから

$$(\#3) \Leftrightarrow x = z, y = 3z$$

となります。これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります。

具体例(6)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすれば、相異なる固有値の固有ベクトルは線型独立ですから、 P は正則となります。このとき

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (-1 \cdot \vec{p}_1 \ 1 \cdot \vec{p}_2 \ 2 \cdot \vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$