3 次元固有値問題 (2)

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 10 月 18 日 at 駒場
2019 年 10 月 11 日 at 駒場
V04 2020 年 10 月 9 日 at 駒場上空

具体例 (1)—固有方程式が重根をもつ場合

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

の固有値と固有ベクトルを求めます.

具体例 (2)—固有方程式

$$
\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2
$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$(重根) であることが分かります.

具体例 (3)—固有ベクトル

(i) $\underline{\lambda = 1\text{ のとき}}$行列式の計算における行基本変形を用いると

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#1)$$

であることが分かりますから

$$(\#1) \Leftrightarrow x = 2z,\ y = -z$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (3)—固有ベクトル

(ii) $\underline{\lambda = 3 \text{ のとき}}$ 上の行列式の計算の行基本変形を用いて

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = {\color{red}3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - z = 0 \qquad (\#2)$$

となります．これから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0 \text{ OR } z \neq 0)$$

であることが分かります．

具体例 (4)—対角化

ここでさらに

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

と定めます．一般論によって

$$V(1) \oplus V(3)$$

が成立しますから，$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$ とすると

$$c_1\vec{p}_1 = \vec{0},\ c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

となります．$\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ であることが分かります．

$$c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_2 = c_3 = 0$ が従います．よって P は正則となります．

具体例 (5)—対角化

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (1\cdot\vec{p}_1\ 3\cdot\vec{p}_2\ 3\cdot\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

と A が対角化されます.

前回の最後の定理の一般化

- $A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell \in \mathbf{K}$

$$V(\alpha_i) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \alpha\vec{v}\}$$

- **定理** $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$

$$\vec{v}_i \in V(\alpha_i) \quad (i = 1, \cdots, \ell)$$

$$\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

ならば

$$\vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

- 証明は ℓ の帰納法を用いる。

部分空間の和と直和

- $V_i \subset \mathbf{K}^n$ が部分空間とする $(i = 1, \cdots, \ell)$。このとき

$$V_1 + \cdots + V_\ell := \{\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell;\ \vec{v}_i \in V_i \quad (i = 1, \cdots, \ell)\}$$

  は $\mathbf{K}^n$ の部分空間である。

- $$\vec{v}_i \in V_i (i = 1, \cdots, \ell), \quad \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_\ell = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_\ell = \vec{0}$$

  が成立するとき、$V_1 + \cdots + V_\ell$ は**直和**といい

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$$

  と記す。

行列の三角化

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有値が $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ とする。

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

- **定理** $P \in M_3(\mathbf{K})$ である正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

と三角行列にできる。

証明で必要な事実（部分空間の基底）

- V が $\mathbf{K}^n$ の部分空間とする。このとき

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$$

が線型独立ならば、これを含む V の基底

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k,\ \vec{v}_{k+1}, \cdots, \vec{v}_\ell$$

が存在する。

Cayley-Hamilton の定理

- **定理** $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して
$$\Phi_A(A) = O_3$$
- 一般に多項式 $f, g \in \mathbf{K}[\lambda]$ に対して
$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \ (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$
- $$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

固有空間分解 (1)

- $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して、固有値 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ が単純としよう。

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

- $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とすると $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ を $\vec{v}$ で表せるか。

固有空間分解 (2)

- そのアイデア (1) $f(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\vec{v} \in V(\alpha)$ に対して

$$f(A)\vec{v} = f(\alpha)\vec{v}$$

- そのアイデア (2)

$$\frac{(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 1$$