3 変数の行列式 No1

Nobuyuki TOSE

MSF2019 April 30, 2019（平成最後の講義）

- 定義

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

復習 No2（余因子展開）

- 2 列と 3 列の展開

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

3 つの基本性質

- **(I)** 各列の線型性　例えば

$$\det\left(\vec{a}\ \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}\ \vec{c}\right)=\lambda\cdot\det\left(\vec{a}\ \vec{\alpha}\ \vec{c}\right)+\mu\cdot\det\left(\vec{a}\ \vec{\beta}\ \vec{c}\right)$$

- **(II)** 交代性　例えば

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=-\det(\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b})$$

- **(III)** 正規性

$$\det(I_3)=1$$

(I) 各列の線型性を示すには以下の定理を用いる.

定理

$$\boldsymbol{F}:\ \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}$$

は

$$\boldsymbol{F(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})} \quad (\boldsymbol{\vec{x}, \vec{y}} \in \mathbf{K}^3)$$

を満たします.

復習 No4（基本性質から）

- **(IV)** 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は $\mathbf{0}$ となります。例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0$$

- **(V)** $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません。例えば

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} + \lambda\vec{a} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

- ベクトルの転置

$$
{}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}
$$

$$
{}^t\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}
$$

- 行列の転置

$$
{}^t\left(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n\right) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}
$$

$$
{}^t\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \left({}^t\mathbf{a}_1 \cdots {}^t\mathbf{a}_m\right)
$$

転置と行列式

- 転置行列の行列式

$$\det\left({}^t A\right) = \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

証明

- 証明

$$
\begin{aligned}
|{}^tA| &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) \\
&\quad + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) \\
&\quad + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = |A|
\end{aligned}
$$

- 行の余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

- ここで 2 次元の公式

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \det \left({}^t\mathbf{a}\ {}^t\mathbf{b} \right)$$

2 行と 3 行の余因子展開

- 行の余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

行に関する基本性質

- 各行に関する線形性

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

- 行に関する交代性

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

行による性質

- **(IV)** 異なる 2 行が等しい場合

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{c}\\ \mathbf{c}\end{pmatrix}=0$$

- **(VI)** $i \neq j$　のとき j 行に i 行の λ 倍を加える

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\\ \mathbf{c}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{b}\\ \mathbf{c}+\lambda\mathbf{a}\end{pmatrix}$$

証明

- 証明（行に関する線形性）
  準備　${}^t(\boldsymbol{\lambda\alpha} + \boldsymbol{\mu\beta}) = \boldsymbol{\lambda}{}^t\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\mu}{}^t\boldsymbol{\beta}$
  $$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\lambda\alpha} + \boldsymbol{\mu\beta} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t(\boldsymbol{\lambda\alpha} + \boldsymbol{\mu\beta}) & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$
  $$= \det\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & \boldsymbol{\lambda}{}^t\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\mu}{}^t\boldsymbol{\beta} & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$
  $$= \boldsymbol{\lambda}\det\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\boldsymbol{\alpha} & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\mu}\det\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\boldsymbol{\beta} & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$
  $$= \boldsymbol{\lambda}\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\mu}\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

- 行列の積と行列式

$$\det(XA) = \det(X) \cdot \det(A)$$

- 復習（順列の符号による行列式）

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \sum_{(i\ j\ k)} a_i b_j c_k \varepsilon(i\ j\ k)$$

注意 和は $\{1, 2, 3\}$ の全ての順列を動く。

- 証明の準備（順列の符号）

$$(3\ 2\ 1) \to (1\ 2\ 3)\ \Rightarrow \varepsilon(3\ 2\ 1) = -1$$

$$\det(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_1) = -\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

$$(3\ 1\ 2) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3) \Rightarrow \varepsilon(3\ 1\ 2) = +1$$

$$\det(\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2) = -\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2) = \det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

- まとめ　順列　$(i\ j\ k)$

$$\det\left(\vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k\right) = \varepsilon(i\ j\ k)\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\right)$$

証明

- 設定 $X = (\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$ $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$

$$X\vec{a} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{x}_i$$

$$\det(\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{x}_i\ \ *\ \ *) = \det(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3\ \ *\ \ *)$$

$$= a_1 \det(\vec{x}_1\ \ *\ \ *) + a_2 \det(\vec{x}_2\ \ *\ \ *) + a_3 \det(\vec{x}_3\ \ *\ \ *)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \det(\vec{x}_i\ \ *\ \ *)$$

- 証明

$$\det\left((\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)\cdot(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\right)$$
$$=\det\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\vec{x}_i\ \sum_{j=1}^{3} b_j\vec{x}_j\ \sum_{k=1}^{3} c_k\vec{x}_k\right)$$
$$=\sum_{i,j,k} a_ib_jc_k\det(\vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k)$$
$$=\sum_{(i\ j\ k)} a_ib_jc_k\cdot\varepsilon(i\ j\ k)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)=\det(A)\cdot\det(X)$$