

3変数の行列式 No1

Nobuyuki TOSE

MSF2019 April 30, 2019 (平成最後の講義)
V001e 2021/05

復習 (定義)

- 定義

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

行列 $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$ に対して

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

復習 No2 (余因子展開)

- 2列と3列の展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

3つの基本性質

- (I) 各列の線型性 例えは

$$\det(\vec{a} \ \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} \ \vec{c}) = \lambda \cdot \det(\vec{a} \ \vec{a} \ \vec{c}) + \mu \cdot \det(\vec{a} \ \vec{\beta} \ \vec{c})$$

- (II) 交代性 例えは

$$\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = -\det(\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{b})$$

- (III) 正規性

$$\det(I_3) = 1$$

3つの基本性質—3重線型性

(I) 各列の線型性を示すには以下の定理を用いる。

定理

$$F : \mathbf{K}^3 \rightarrow \mathbf{K} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{K}^3)$$

を満たします。

復習 No4 (基本性質から)

- (IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります。例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0$$

- (V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません。例えば

$$\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \det(\vec{a} \ \vec{b} + \lambda \vec{a} \ \vec{c})$$

- ベクトルの転置

$${}^t(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

- 行列の転置

$${}^t(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix}$$

$${}^t \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = ({}^t\mathbf{a}_1 \cdots {}^t\mathbf{a}_m)$$

- 転置行列の行列式

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

● 証明

$$\begin{aligned} |{}^t A| &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) \\ &\quad + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) \\ &\quad + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = |A| \end{aligned}$$

列の性質から行の性質

- 行の余因子展開

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- ここで2次元の公式

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

2行と3行の余因子展開

- 行の余因子展開

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

行に関する基本性質

- 各行に関する線形性

$$\det \begin{pmatrix} a \\ \lambda\alpha + \mu\beta \\ c \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ c \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ c \end{pmatrix}$$

- 行に関する交代性

$$\det \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

行による性質

- (IV) 異なる2行が等しい場合

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = 0$$

- (V) $i \neq j$ のとき j 行に i 行の λ 倍を加える

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} + \lambda \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

● 証明 (行に関する線形性)

$$\text{準備} \quad {}^t(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda {}^t\alpha + \mu {}^t\beta$$

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda\alpha + \mu\beta \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t(\lambda\alpha + \mu\beta) & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & \lambda {}^t\alpha + \mu {}^t\beta & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\alpha & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} & {}^t\beta & {}^t\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \alpha \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \beta \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

- 行列の積と行列式

$$\det(XA) = \det(X) \cdot \det(A)$$

- 復習 (順列の符号による行列式)

$$\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \sum_{(i \ j \ k)} a_i b_j c_k \varepsilon(i \ j \ k)$$

注意 和は $\{1, 2, 3\}$ の全ての順列を動く。

証明の準備

- 証明の準備 (順列の符号)

$$(3\ 2\ 1) \rightarrow (1\ 2\ 3) \Rightarrow \varepsilon(3\ 2\ 1) = -1$$

$$\det(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_1) = -\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

$$(3\ 1\ 2) \rightarrow (1\ 3\ 2) \rightarrow (1\ 2\ 3) \Rightarrow \varepsilon(3\ 1\ 2) = +1$$

$$\det(\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2) = -\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2) = \det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

- まとめ 順列 $(i\ j\ k)$

$$\det(\vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k) = \varepsilon(i\ j\ k) \det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

証明

- 設定 $X = (\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3)$ $A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$

$$X\vec{a} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\vec{x}_i$$

$$\det\left(\sum_{i=1}^3 a_i\vec{x}_i \ * \ *\right) = \det(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 \ * \ *)$$

$$= a_1 \det(\vec{x}_1 \ * \ *) + a_2 \det(\vec{x}_2 \ * \ *) + a_3 \det(\vec{x}_3 \ * \ *)$$

$$= \sum_{i=1}^3 a_i \det(\vec{x}_i \ * \ *)$$

証明 No2

- 証明

$$\begin{aligned} & \det \left((\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3) \cdot (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \right) \\ &= \det \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{x}_i \quad \sum_{j=1}^3 b_j \vec{x}_j \quad \sum_{k=1}^3 c_k \vec{x}_k \right) \\ &= \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k \det(\vec{x}_i \ \vec{x}_j \ \vec{x}_k) \\ &= \sum_{(i \ j \ k)} a_i b_j c_k \cdot \varepsilon(i \ j \ k) \det(\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \vec{x}_3) = \det(A) \cdot \det(X) \end{aligned}$$