3次元の回転行列

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011年06月 at 駒場
V002 Lec 15 2020年11月

3 次元の回転行列

- $A \in M_3(\mathbf{R})$ が
$$ {}^tAA = A{}^tA = I_3, \quad \det(A) = 1 $$
を満たすとします。このとき A は回転行列と呼びます。
- $A \in M_3(\mathbf{R})$ が
$$ {}^tAA = A{}^tA = I_3 $$
を満たすとき直交行列と呼びますが $\det({}^tA) = \det(A)$ が一般的に成立しますから
$$ \det({}^tAA) = \det({}^tA) \cdot \det(A) = \det(A)^2 = \det(I_3) = 1 $$
から $\det(A) = \pm 1$ となります。

直交行列

- $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して次の条件は必要十分です。
  (i) A は直交行列 ${}^tAA = A{}^tA = I_3$
  (ii) $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3)$
  (iii) $||A\vec{x}|| = ||\vec{x}|| \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^3)$
  (iv) $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ とするとき
  $$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij}$$
  従って、$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底

証明のヒントとなる事実

- $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^t A\vec{y}) \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^3)$
- $||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 = 4(\vec{x}, \vec{y})$
- $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ とするとき

$$
{}^t AA = \begin{pmatrix} ||\vec{a}_1||^2 & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & ||\vec{a}_2||^2 & (\vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_3, \vec{a}_1) & (\vec{a}_3, \vec{a}_2) & ||\vec{a}_3||^2 \end{pmatrix}
$$

回転行列の性質

- **定理**　A が回転行列とする。このとき、ある $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して

$$A\vec{x} = \vec{x}$$

- **（証明）**

$$\begin{aligned} \det(A - I_3) &= \det({}^tA - I_3) \\ &= \det(A^{-1} - I_3) \\ &= \det(A^{-1}) \cdot \det(I_3 - A) \\ &= -\det(A - I_3) \end{aligned}$$

- A は固有値 1 を持つことになる。この $\vec{x}$ を軸という。

軸が 2 方向あるときは？

- **定理** $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{R}^3$ が 1 次独立とする。このとき

$$A\vec{x}=\vec{x},\ A\vec{y}=\vec{y}\Rightarrow A=I_3$$

- （**証明**）$V=\mathbf{R}\vec{x}+\mathbf{R}\vec{y}$ とする。
  $\vec{z}\perp V,\ \vec{u}\in V$ とすると

$$\begin{aligned}(A\vec{z},\vec{u}) &= (A\vec{z},A\vec{u})\\ &= ({}^tAA\vec{z},\vec{u})=(\vec{z},\vec{u})=0\end{aligned}$$

以上から $A\vec{z}\perp V$ が従う。また A は直交だから $||A\vec{z}||=||\vec{z}||$

軸が2方向あるときは？（証明の続き）

- $\vec{z} \neq \vec{0}$ とする。このとき
$$A\vec{z} = \vec{z} \quad \text{または} \quad A\vec{z} = -\vec{z}$$
- $A\vec{z} = -\vec{z}$ とすると
$$A(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) = (\vec{x}\ \vec{y}\ -\vec{z})$$
から
$$\det(A) \cdot \det(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) = \det(\vec{x}\ \vec{y}\ -\vec{z}) = -\det(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$$
となり $\det(A) = -1$ が従う。これは A が回転であることに矛盾。
- $A(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}) = (\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$ において $(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$ は正則だから $A = I_3$

$A \neq I_3$ のとき は

- $\vec{u}_1 \in \mathbf{R}^3$ が単位ベクトルで $A\vec{u}_1 = \vec{u}_1$ とする。
- $\det(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = 1$ を満たす $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ をとる。
- $(A\vec{u}_2, \vec{u}_1) = (A\vec{u}_2, A\vec{u}_1) = (\vec{u}_2, \vec{u}_1) = 0$ から $A\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$、同様に $A\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$
- このことから

$$A(\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3) = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

$A \neq I_3$ のときは（その２）

- $U = (\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \vec{u}_3)$ とすると U は直交行列である。
- $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$ {}^tUAU = T $$

から T は

$$ {}^tTT = T\,{}^tT = I_3, \quad \det(T) = 1 $$

を満たす。

$A \neq I_3$ のときは（その３）

- $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$ {}^tBB = B\,{}^tB = I_2, \quad \det(B) = 1 $$

となり

$$ B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

となる。