第6章　微分方程式入門

6.0.1　虚数の固有値を持つ実2次正方行列

単振動の方程式

　単振動を記述する微分方程式

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

を考えます（$\omega > 0$ とします）．ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\omega^2 x(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とベクトル値の微分方程式として解きます．まず

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}$$

とおきます．このとき

$$\begin{aligned} X'(t) &= \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \\ -\omega^2\cos\omega t & -\omega\sin\omega t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} X(t) = X(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立します．さらに

$$(X(-t))' = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} X(-t) = -X(-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立することも従います.

$$
\begin{aligned}
&\left\{X(-t)\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}\right\}' \\
=\ & -X(-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + X(-t)\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} \\
=\ & -X(-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + X(-t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

から

$$X(-t)\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

が示すことができます．ここで C_1 と C_2 は定数です．他方

$$X(-t)X(t) = X(t)X(-t) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = X(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

を得ます．この式の第 1 成分から

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} C_2 \sin \omega t$$

が分ります．そして、

$$x'(t) = -\omega C_1 \sin\ \omega t + C_2 \cos\ \omega t$$

から

$$x(0) = C_1, \quad x'(0) = C_2$$

となりますから

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} x'(0) \sin \omega t$$

が分かります.

行列型の場合

実 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が 2 つの実でない固有値を持つ場合を考えます．すなわち A の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

が虚根

$$\alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$$

を持つ場合を考えます．そしてこの A に対して、微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

を考えます．

まずは線形代数の話です．2 次の実正方行列が虚数の固有値を持つ場合に実の標準形がどうなるかという問題を考えます．

行列 A の固有値 $\alpha + i\beta$ に対する固有ベクトルを

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

が成立します．A が実数値ですから、(6.2) の複素共役を取ると

$$A\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = (\alpha - i\beta)\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

が分かります．ここで

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

と実部と虚部を分けると

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_1 \\ z_2 + \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \beta\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成立します．同様に

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A\cdot\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} z_1-\bar{z}_1 \\ z_2-\bar{z}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i}A\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2i}(\alpha+i\beta)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i}(\alpha-i\beta)\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

も成立します．従って

$$A\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

を得ます．ここで行列

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

が正則であることを背理法を用いて証明します．正則でないとすると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

を満たす $c \in \mathbb{R}$ が存在します．以下では最初の場合を考えます．このとき

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (1+ci)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

が従い、 (6.2) に代入すると

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\alpha+i\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を得ます．この式の虚部をとると

$$\vec{0} = \beta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従いますが、これから

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となり、矛盾が生じます．固有ベクトル

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

は非ゼロベクトルであるからです.（２番目の場合も同様です.）以上で P は正則で、

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

が成立することがわかります．ここで

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{u}(t) &= P^{-1} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{((6.1) に注意)} \\ &= P^{-1}APP^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \vec{u}(t) \end{aligned}$$

となり、結局

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \vec{u}(t)$$

を解くことになります．ここで行列 $X(t)$ と $X_0(t)$ を

$$X(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\ \beta t & \sin\ \beta t \\ -\sin\ \beta t & \cos\ \beta t \end{pmatrix} = e^{\alpha t} X_0(t)$$

と定めます．このとき

$$X_0'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} X_0(t) = X_0(t) \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

が成立することを用いると

$$\begin{aligned} X'(t) &= \left(e^{\alpha t}\right)' X_0(t) + e^{\alpha t} X_0'(t) \\ &= \alpha e^{\alpha t} X_0(t) + e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} X_0(t) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} X(t) \end{aligned}$$

が成立します．同様に

$$\frac{d}{dt}X(t) = X(t)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

も示すことができます．以上の計算から

$$\frac{d}{dt}X(-t) = -\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}X(-t) = -X(-t)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

がわかります．ここで

$$\begin{aligned} & \{X(-t)\vec{u}(t)\}' \\ = \; & -X(-t)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\vec{u}(t) + X(-t)\frac{d}{dt}\vec{u}(t) \\ = \; & -X(-t)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\vec{u}(t) + X(-t)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\vec{u}(t) = \vec{0} \end{aligned}$$

が従いますから、$X(-t)\vec{u}(t)$ は

$$\{X(-t)\vec{u}(t)\} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

と定数 C_1, C_2 を用いて表示できます．他方、

$$X(-t)X(t) = X(t)X(-t) = I_2$$

ですから

$$\vec{u}(t) = X(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

を得ます．さらには

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\vec{u}(t) = PX(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

も示すことができます．(6.6) において $t = 0$ とおくと

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \vec{u}(0) = X(0)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

を得ます．このことから

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P\vec{u}(t) = PX(t)P^{-1}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

と解を初期データで表示することができます．

例 6.1. 行列 A を

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して力学系

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = A\vec{v}(t)$$

を解きましょう．まず A の固有値を求めます．すなわち固有方程式

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0$$

を解くと、固有値が

$$\lambda = \pm i$$

であることが分ります．$\lambda = i$ に対する固有方程式

$$\begin{pmatrix} i - 1 & 1 \\ -2 & i + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

は

$$(i-1)z_1 + z_2 = 0$$

と同値です．このことから固有ベクトル $\vec{v_1}$ は

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ (1-i)z_1 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

であることが分ります．ここで $z_1 = 1$ の場合を考えます．このとき

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と実部と虚部が分かれます．このとき $\lambda = -i$ に対する固有ベクトルとして

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

をとることができます．ここで

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + i\vec{w}_2, \quad \vec{v}_2 = \vec{w}_1 - i\vec{w}_2$$

となります．ここで

$$
\begin{aligned}
A\vec{w}_1 &= \frac{1}{2}(A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2) = \frac{1}{2}(i\vec{v}_1 - i\vec{v}_2) = -\vec{w}_2 \\
A\vec{w}_2 &= \frac{1}{2i}(A\vec{v}_1 - A\vec{v}_2) = \frac{1}{2i}(i\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = \vec{w}_1
\end{aligned}
$$

と計算されます．ここで $P = (\vec{w}_1\ \vec{w}_2)$ と定めると

$$
AP = (A\vec{w}_1\ A\vec{w}_2) = (-\vec{w}_2\ \vec{w}_1) = (\vec{w}_1\ \vec{w}_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

が分ります．さらに P が正則であることも用いて

$$
A = P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = PA_0P^{-1}
$$

と A の実標準形 A_0 を求めることができます．

ここで力学系の問題を考えます．解を $\vec{v}(t)$ として

$$
\left(P^{-1}\vec{v}(t)\right)' = P^{-1}\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = P^{-1}A\vec{v}(t) = P^{-1}APP^{-1}\vec{v}(t) = A_0P^{-1}\vec{v}(t)
$$

より $\vec{x}(t) = P^{-1}\vec{v}(t)$ は

$$
\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A_0\vec{x}(t)
$$

を満たします．このことから

$$
\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\vec{x}(0)
$$

と解くことができます．これを用いて

$$
\vec{v}(t) = P\vec{x}(t) = P\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}P^{-1}\vec{v}(0)
$$

と解を求めることができます．

例を考えましょう．2 次の実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

について考えましょう．A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

となりますから、固有値は $\lambda = 1 \pm i$ であることが分かります．$\lambda = 1 + i$ の固有ベクトル $\vec{w_1} = {}^t(z_1\ z_2)$ は

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_1 = (-1+i)z_2$$

の解ですから、

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1+i)z_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

と $z_2 \in \mathbb{C}$ を用いて表現できます．特に $z_2 = 1$ の場合を考えると、$\vec{w_1}$ と $\lambda = -1 - i$ の固有ベクトルで $\vec{w_1}$ の複素共役である $\vec{w_2}$ は

$$\vec{w_1} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{w_2} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $\vec{w_1}$ の実部 $\vec{v_1}$ と虚部 $\vec{v_2}$ はそれぞれ

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と計算されます．さらに

$$A\vec{v_1} = \vec{v_1} - \vec{v_2}, \quad A\vec{v_1} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

を得ます．ここで $P = (\vec{v_1}\ \vec{v_2})$ と定めると

$$AP = (A\vec{v_1}\ A\vec{v_2}) = (\vec{v_1}\ \vec{v_2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と標準化できます．