2次曲面

$A \in M_3(\mathbb{R})$ は実対称行列, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ とする. $A \neq O_3$ のとき

$$(\#) \quad \left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + 2\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + c = 0$$

を満たす $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ を2次曲面と呼ぶ.

大まかな分類.

Ⅰ $\mathrm{rank}(A) = 3$ のとき. $(\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0)$

Ⅱ $\mathrm{rank}(A) = 2$ のとき.

(i) $\vec{b} \notin \mathrm{Im}(A)$

(ii) $\vec{b} \in \mathrm{Im}(A)$

Ⅲ $\mathrm{rank}(A) = 1$ のとき.

(i) $\vec{b} \notin \mathrm{Im}(A)$

(ii) $\vec{b} \in \mathrm{Im}(A)$

(I) $\mathrm{rank}(A)=3$ のとき．平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

を用いて（＃）を X, Y, Z の1次の項のない形にできる．

$$\left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \vec{v_0}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \vec{v_0}\right) + 2\left(\vec{e}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \vec{v_0}\right) + c$$

$$= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right)$$

$$+ 2\left(\vec{e} + A\vec{v_0}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right)$$

$$+ (A\vec{v_0}, \vec{v_0}) + 2(\vec{e}, \vec{v_0}) + c$$

と展開すると（＃）は $\underline{\vec{v_0} = -A^{-1}\vec{e}}$ のとき．

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}\right) + (\vec{e}, \vec{v_0}) + c = 0$$

とできる．以下 $c' = (\vec{e}, \vec{v_0}) + c$ とする．

A を直交行列 P によって

$$^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

とすると直交座標変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ によって

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 + c' = 0$$

とできる．

(I-i) $\alpha, \beta, \gamma > 0$ のとき. $\alpha = \dfrac{1}{\omega_1^2}$, $\beta = \dfrac{1}{\omega_2^2}$, $\gamma = \dfrac{1}{\omega_3^2}$

とすると ($\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$ とする)

$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 + c' = 0$$

となる.

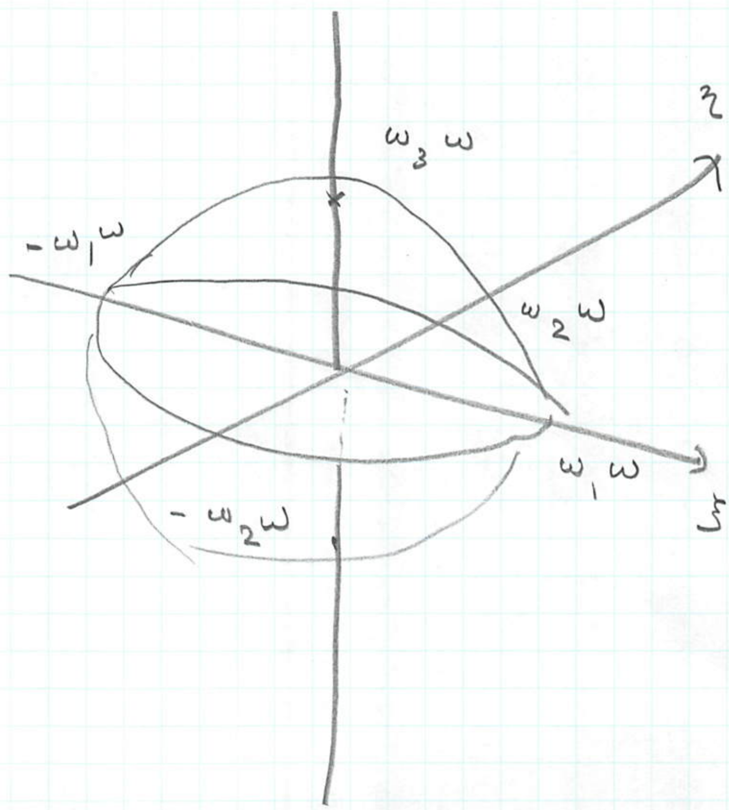
① $c' > 0$ のとき 空集合. ② $c' = 0$ のとき.

$\xi = \eta = \zeta = 0$ から

$x = \alpha_1,\ y = \alpha_2,\ z = \alpha_3$

の1点.

③ $c' < 0$ のとき. $-c' = \omega^2$ とすると ($\omega > 0$)



(I-ii) $\alpha, \beta > 0$, $\gamma < 0$ のとき. $\omega_j > 0$ として $(j=1,2,3)$

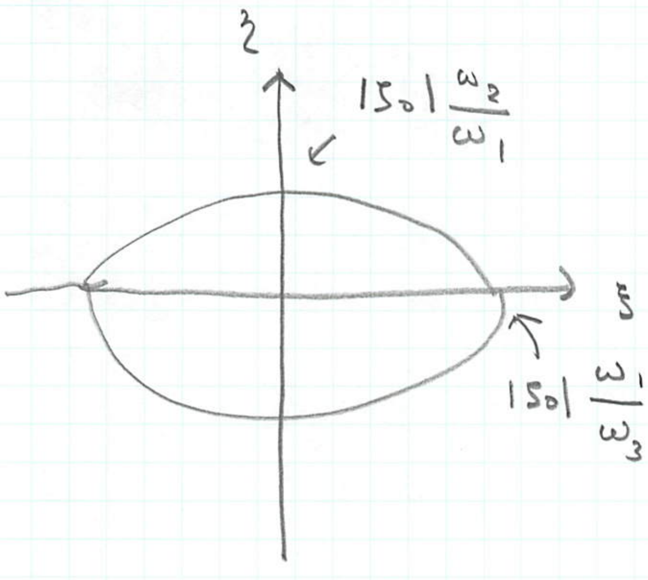
$\alpha = \dfrac{1}{\omega_1^2}$, $\beta = \dfrac{1}{\omega_2^2}$, $\gamma = -\dfrac{1}{\omega_3^2}$ とおいて (#) を

$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 + c' = 0$$

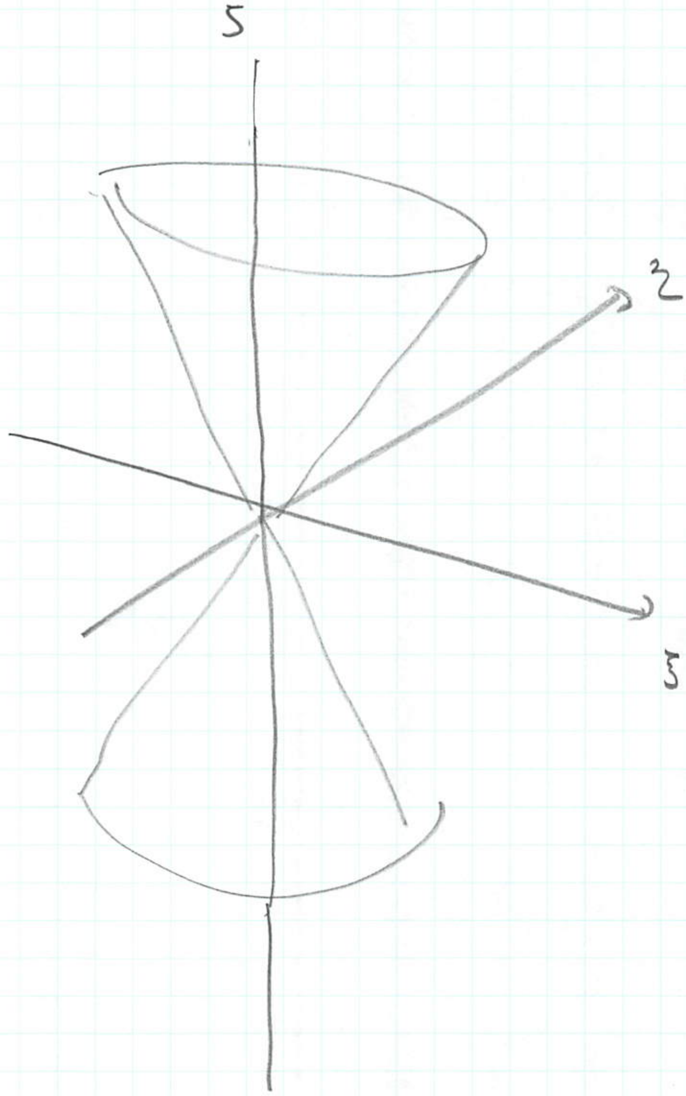
と表す.

① $c' = 0$ のとき.

$\zeta = \zeta_0 \neq 0$ の断面は



と楕円になる.

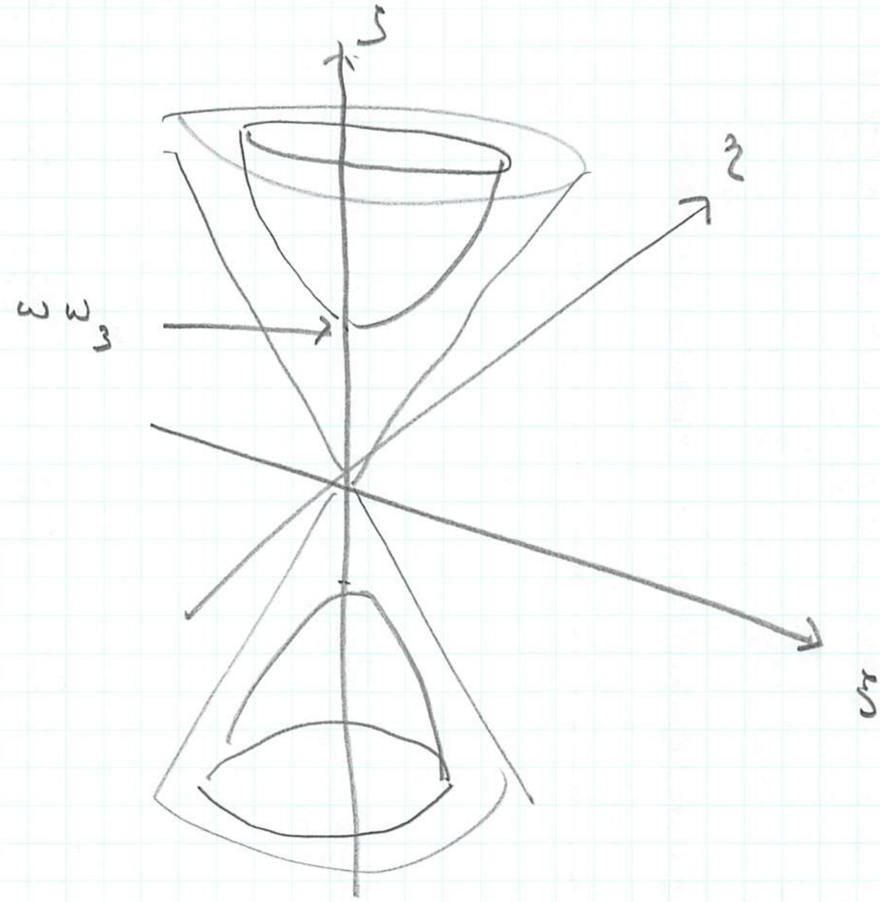


② $c' > 0$ のとき　$c' = \omega^2$, $\omega > 0$ とする.

$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 - \omega^2$$

とみると $\zeta = \zeta_0$ の断面 は $\zeta_0^2 < \omega^2 \omega_3^2$ のとき空集合

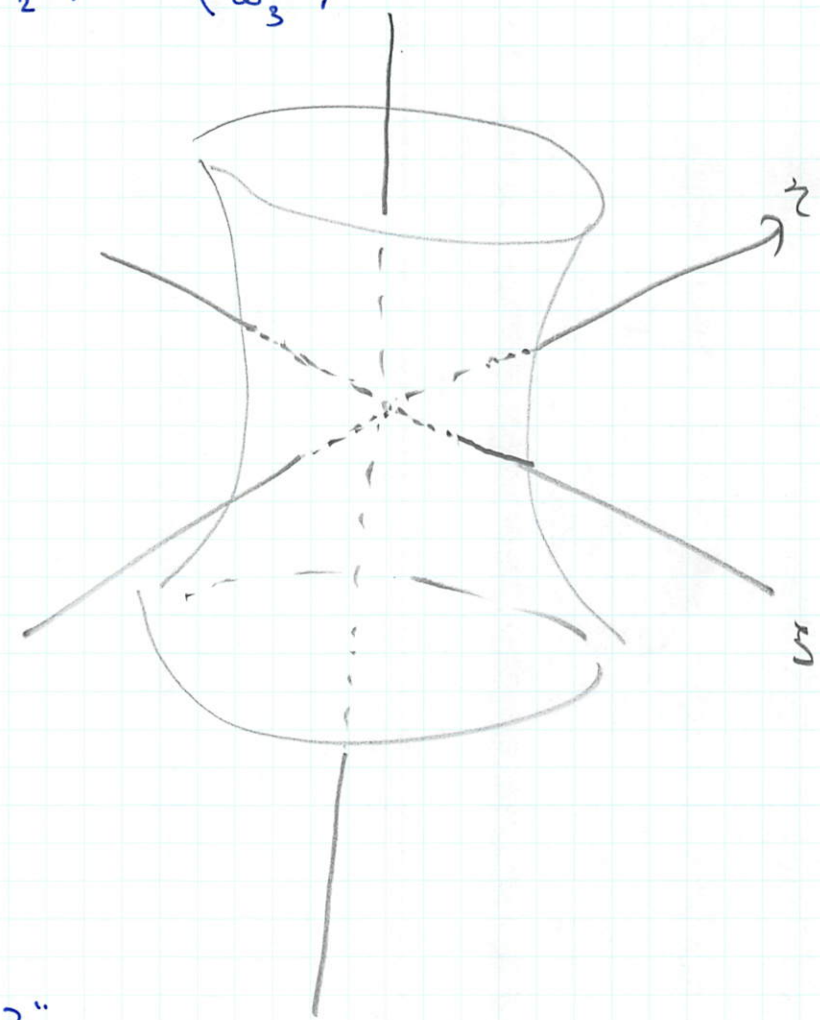
となる. $\zeta_0^2 \geqq \omega^2 \omega_3^2$ のときは 楕円 または 1点 となる.



二葉双曲面と呼ぶ.

③ $c' < 0$ のとき　$c' = -\omega^2, \omega > 0$ とすると

$$\left(\frac{\xi}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{\zeta}{\omega_3}\right)^2 + \omega^2$$



一葉双曲面と呼ぶ

(問) ξ−ζ平面，η−ζ平面による断面は何か

考えてみよう.

Ⅱ $\mathrm{rank}\, A = 2$ のとき．このとき $\det(A) = 0$ となる．
$\exists P \in O(3)$
$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$$ とできます．

(Ⅱ-i) $\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A)$ とします．$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ とすると

$$\mathrm{Im}(A) = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}({}^tA)^{\perp} = \mathrm{Im}(A)^{\perp} = \mathbb{R}\vec{p}_3$$

に注意します．

$$\vec{e} = (\vec{e}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 + (\vec{e}, \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{e}, \vec{p}_3)\vec{p}_3$$

と直交分解します．このとき，

$$\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A) \iff (\vec{e}, \vec{p}_3) \neq 0$$

に注意します．このとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ と直交座標変換を考えると

(#) $$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + 2\left(\vec{e}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + c = 0$$

$$\iff \alpha X^2 + \beta Y^2 + 2(\vec{e}, \vec{p}_1)X + 2(\vec{e}, \vec{p}_2)Y + 2(\vec{e}, \vec{p}_3)Z + c = 0$$

となります．X と Y について平方完成をすると

$$\alpha\left(X + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 + \beta\left(Y + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)}{\beta}\right)^2 + 2(\vec{e}, \vec{p}_3)Z + c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)^2}{\beta} = 0$$

となります．

さらに $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + \dfrac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha} \\ Y + \dfrac{(\vec{e}, \vec{p}_2)}{\alpha} \\ Z - c' \end{pmatrix}$ と平行移動の

座標変換をとると（c'は下まで）

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{2(\vec{e}, \vec{p}_3)}, \quad \beta' = -\frac{\beta}{2(\vec{e}, \vec{p}_3)}$$

として $$c' = -\frac{1}{2(\vec{e}, \vec{p}_3)}\left(c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)^2}{\beta}\right)$$

$$\zeta = \alpha' \xi^2 + \beta' \eta^2$$

となります.

問　$\alpha', \beta' > 0$, $\alpha'\beta' < 0$, $\alpha', \beta' < 0$ の場合に分けて

図示しましょう.

(II-ii) $(\vec{e}, \vec{p}_3) = 0$ から

$$\alpha \left(x + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha} \right)^2 + \beta \left(y + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)}{\beta} \right)^2 + c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)^2}{\beta} = 0$$

となります。ここでは

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} \\ y + \dfrac{(\vec{e}, \vec{p}_2)^2}{\beta} \\ z \end{pmatrix}, \quad c' = -c + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_2)^2}{\beta}$$

とすると

$$\alpha \xi^2 + \beta \eta^2 = c'$$

となります。(ζ方向すなわち$\vec{p}_3$方向に不変であることに注意)

(問) α, βの符号, $c' \gtreqless 0$で場合分けして図示しましょう.

III rank $A = 1$ のとき.

$\exists P \in O(3)$ に対して

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0) $$

とできます. このとき. $P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ とすると

$$ \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}\vec{p_1} $$

$$ \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}({}^tA)^{\perp} = \mathrm{Im}(A)^{\perp} = L(\vec{p_2}, \vec{p_3}) $$

となります.

$$ \vec{e} = (\vec{e}, \vec{p_1})\vec{p_1} + (\vec{e}, \vec{p_2})\vec{p_2} + (\vec{e}, \vec{p_3})\vec{p_3} $$

と直交分解します. このとき.

$$ \vec{e} \notin \mathrm{Im}(A) \iff (\vec{e}, \vec{p_2}) \neq 0 \text{ OR } (\vec{e}, \vec{p_3}) \neq 0 $$

であることに注意します. ここで

$$ P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} $$

と直交座標変換すると

$$ (\#) \iff \alpha X^2 + 2(\vec{e}, \vec{p_1})X + 2(\vec{e}, \vec{p_2})Y + 2(\vec{e}, \vec{p_3})Z + c = 0 $$

となります. X について平方完成すると

$$ \alpha\left(X + \frac{(\vec{e}, \vec{p_1})}{\alpha}\right)^2 + 2(\vec{e}, \vec{p_2})Y + 2(\vec{e}, \vec{p_3})Z + c - \frac{(\vec{e}, \vec{p_1})^2}{\alpha} = 0 $$

となります.

(III-i) $\vec{e} \notin \mathrm{Im}(A)$ のとき.

$$\vec{q}_2 = (\vec{e}, \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{e}, \vec{p}_3)\vec{p}_3$$

として ($\vec{q}_2$は$\vec{e}$の$\mathrm{Ker}(A)$への直交射影)

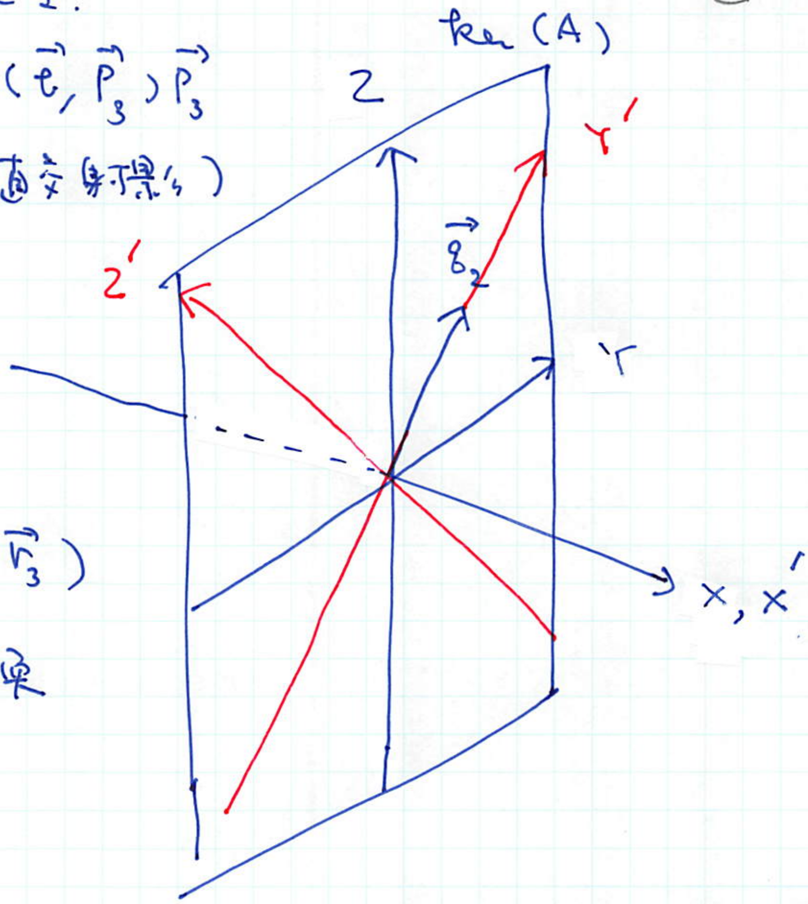
$$\vec{r}_1 = \vec{p}_1$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{\|\vec{q}_2\|}\vec{q}_2$$

である直交行列 $R = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2\ \vec{r}_3)$

と定めると直交座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$



によって

$$\alpha\left(X' + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 + 2dY' + c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} = 0$$

となります. $d = \dfrac{(\vec{q}_2, \vec{e})}{\|\vec{q}_2\|^2}$ となるはずです. $d \neq 0$

に注意して

$$Y' = -\frac{\alpha}{2d}\left(X' + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha}\right)^2 - \frac{1}{2d}\left(c - \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha}\right)$$

となります. $\vec{r}_3$方向 (Z'方向) に不変な図形となります.

(III-ii) $\vec{e} \in \mathrm{Im}(A)$ のとき.

(#) $\Leftrightarrow$ $$\alpha X^2 + 2(\vec{e}, \vec{p}_1) X + c = 0$$

となります. X について平方完成すると

$$\alpha \left(X + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)}{\alpha} \right)^2 = -c + \frac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha}$$

となります. ($\vec{p}_2, \vec{p}_3$ 方向に不変となります).

問 $-c + \dfrac{(\vec{e}, \vec{p}_1)^2}{\alpha} \gtreqless 0$ で場合分けして

どのような図形になるか考えましょう.