正則性について

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba

基本定理

定理 1 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が線型独立であるとします．このとき

$$A := (\vec{a}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{a}_\ell) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{e}_\ell)$$

となる行基本変形が存在します．

証明は ℓ に関する帰納法を用います．

$\ell = 1$ のとき

$\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$, $a_i \neq 0$ と表現できます．

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \vec{b} := \begin{pmatrix} a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

ただし以下の行基本変形を用いました．

$$\text{(i)}1r \to ir,\ \text{(ii)}jr + = 1r \times \left(-\frac{b_j}{a_i}\right)\ (j = 2, \ldots, n),\ \text{(iii)}1r \times = \frac{1}{a_i}$$

$$A = (\vec{a}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{a}_\ell \ \vec{a}_{\ell+1}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & c_\ell \\ \hline & & & c_{\ell+1} \\ & & & \vdots \\ & & & c_n \end{array}\right)$$

このとき $\begin{pmatrix} c_{\ell+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ となります．これからどうするか自分で表現しましょう．

定理 1 の応用 (1)

定理 2 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が線型独立であるとします．このとき

$$PA = (\vec{e}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{e}_\ell)$$

を満たす（n 次）正則行列 P が存在します．

問題 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が線型独立であるとします．このとき $\vec{a}_{\ell+1}, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_\ell, \vec{a}_{\ell+1}, \ldots, \vec{a}_n$$

が線型独立となります．これを定理 2 を用いて証明しましょう．

定理 1 の応用 (2)

定理 3 $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbf{K}^n$ が線型独立であるとします．このとき

$$A = (\vec{a}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{a}_n)$$

は正則であることが分かります．

定理 1 の応用 (2)

定理 3B n 次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \ \ldots \ \ \vec{a}_n) \in M_n(K)$ に対して

$$A\text{は正則} \Leftrightarrow \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$$

定理 3B の応用

定理 3C n 次正方行列 $A = (\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n) \in M_n(K)$ に対して以下は同値です．
(i) A は正則である．
(ii) ある $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $AX = I_n$
(iii) ある $X \in M_n(\mathbf{K})$ に対して $XA = I_n$

<u>(iii)⇒ (i)</u> $A\vec{v} = \vec{0}$ とすると両辺に X を掛けると

$$\vec{0} = X\vec{0} = XA\vec{v} = I_n\vec{v} = \vec{v}$$

<u>(ii)⇒ (i)</u> X が正則であることが分かります．このとき $AX = I_n$ から $A = X^{-1}$ が従い，A も正則であることが分かります．

定理 1 の応用 (3)

定理 1 の $\ell = 1$ のときの証明を用いると次の定理 4 を示したことになります．これは重要です．

定理 4 m 行 n 列の行列 A に対して $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ならば，ある m 次正則行列 P が存在して

$$PA = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$