正則性について

復習. ① $A \in M_3(\mathbb{K})$ に対して

A が正則 $\iff (A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \iff |A| \neq 0$

$(\exists X \in M_3(\mathbb{K}) \quad AX = XA = I_3)$

② $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

(1) A が正則 $\iff \exists X \in M_n(\mathbb{K}) \quad AX = I_n \iff \exists X \in M_n(\mathbb{K}) \quad XA = I_n$

$\Updownarrow$

(2) $(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \iff$ $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ とするとき.
$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ は LI $\iff \mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$

$\boxed{\text{定理}}$ 3 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{K}^n$ が LI $\Longrightarrow$ $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$ と行基本変形できる.

定理　$A \in M_n(\mathbb{K})$ とする

(1) A は正則 $\iff$ (2) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ $\iff$ (3) $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ は単射.

$\iff$ (4) $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ は全射.

$\iff$ (3) かつ (4) f_A は全単射.

$\iff$ (6) $A \to \cdots \to I_n$ と行基本変形できる.

---

(3) について　(3) $\Rightarrow$ (2)　$A\vec{v} = \vec{0}$ とすると $A\vec{0} = \vec{0}$ から $A\vec{v} = A\vec{0}$ i.e.

$f_A(\vec{v}) = f_A(\vec{0})$ である. f_A が単射なので $\vec{v} = \vec{0}$

(2) $\Rightarrow$ (3)　$A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ とすると $A(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \vec{0}$ となる (2) から

$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{0}$ i.e. $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

(4) について　(1) $\Rightarrow$ (4) 明白.

(4) $\Rightarrow$ (1)　$\exists \vec{x}_j \in \mathbb{K}^n$　$A\vec{x}_j = \vec{e}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ 並べると

$A(\vec{x}_1 \cdots x_n) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n) = I_n$ これから A が正則であることが従う.

(6) について

(6) ⇒ (1)　$\exists P \in M_n(\mathbb{K})$　P は正則　$PA = I_n$　これから

$A = P^{-1}$ となり　A が正則であることが分かる.

(1) ⇒ (6)　(1) ⇒ $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ は LI　従って ③ を用いると

$A \to \cdots \to I_n$

と行基本変形できます.