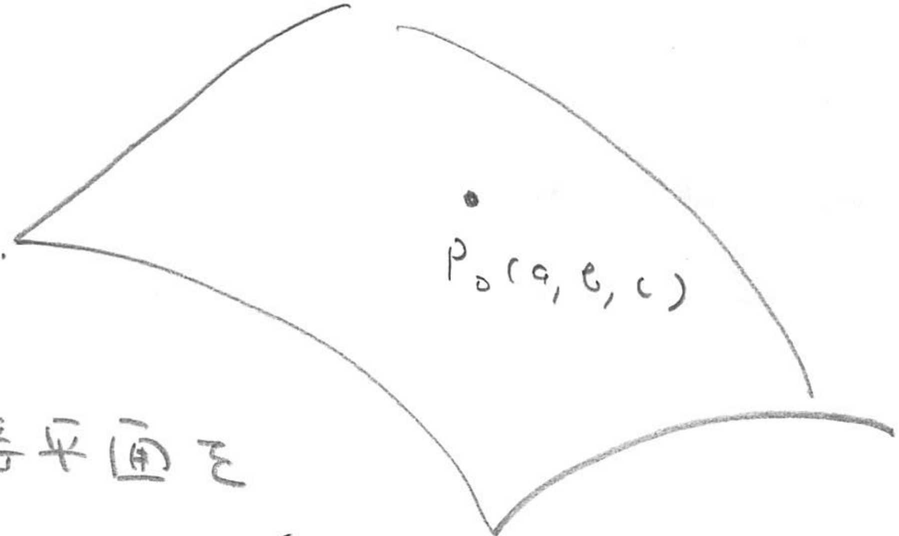
接平面

曲面

$$S:\ g(x, y, z) = 0$$

とその上の点 $P_0(a, b, c)$ があるとします。

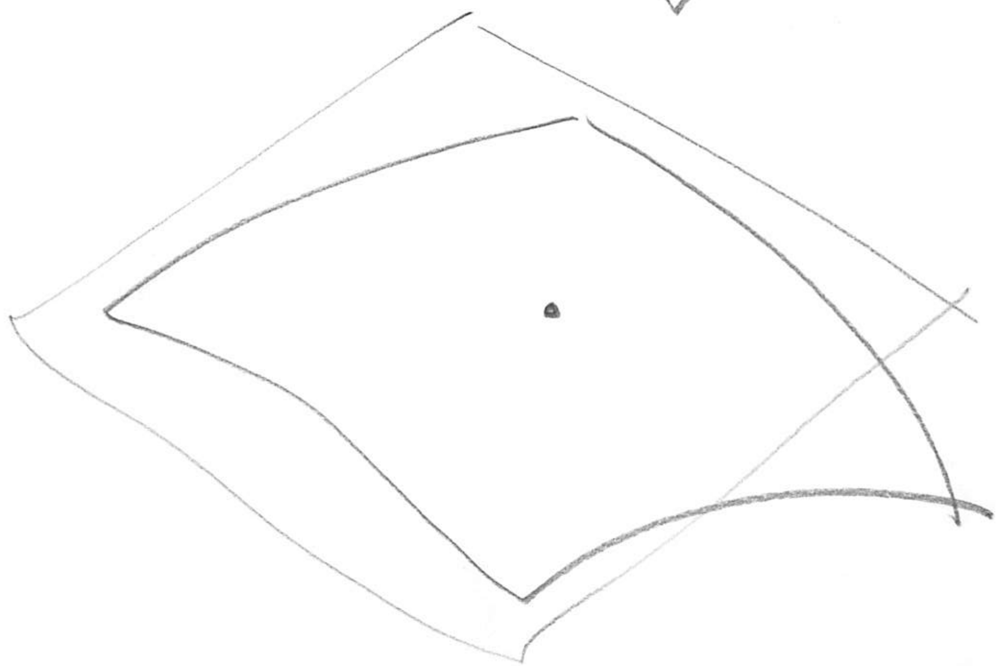


このとき $P_0(a, b, c)$ における S の接平面を求めます。

以下では

$$g_z(P_0) \neq 0$$

とします。

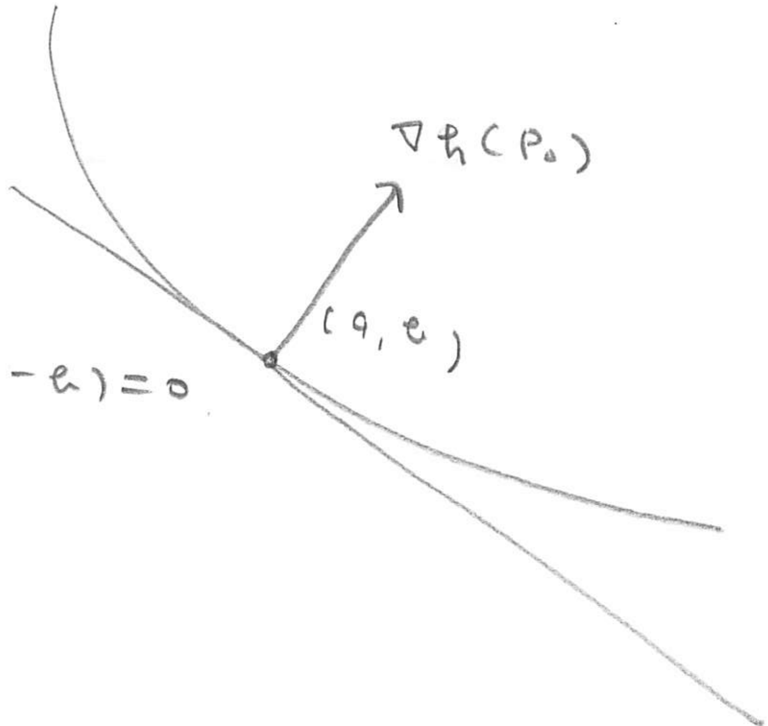


復習 (2次元の場合：接線の方程式)

$C: \ f(x, y) = 0$

上の点 $P_0(a, b)$ における接線は

$$f_x(P_0)(x-a) + f_y(P_0)(y-b) = 0$$



ここで $\nabla(f)(P_0) = \begin{pmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{pmatrix}$

を用いて

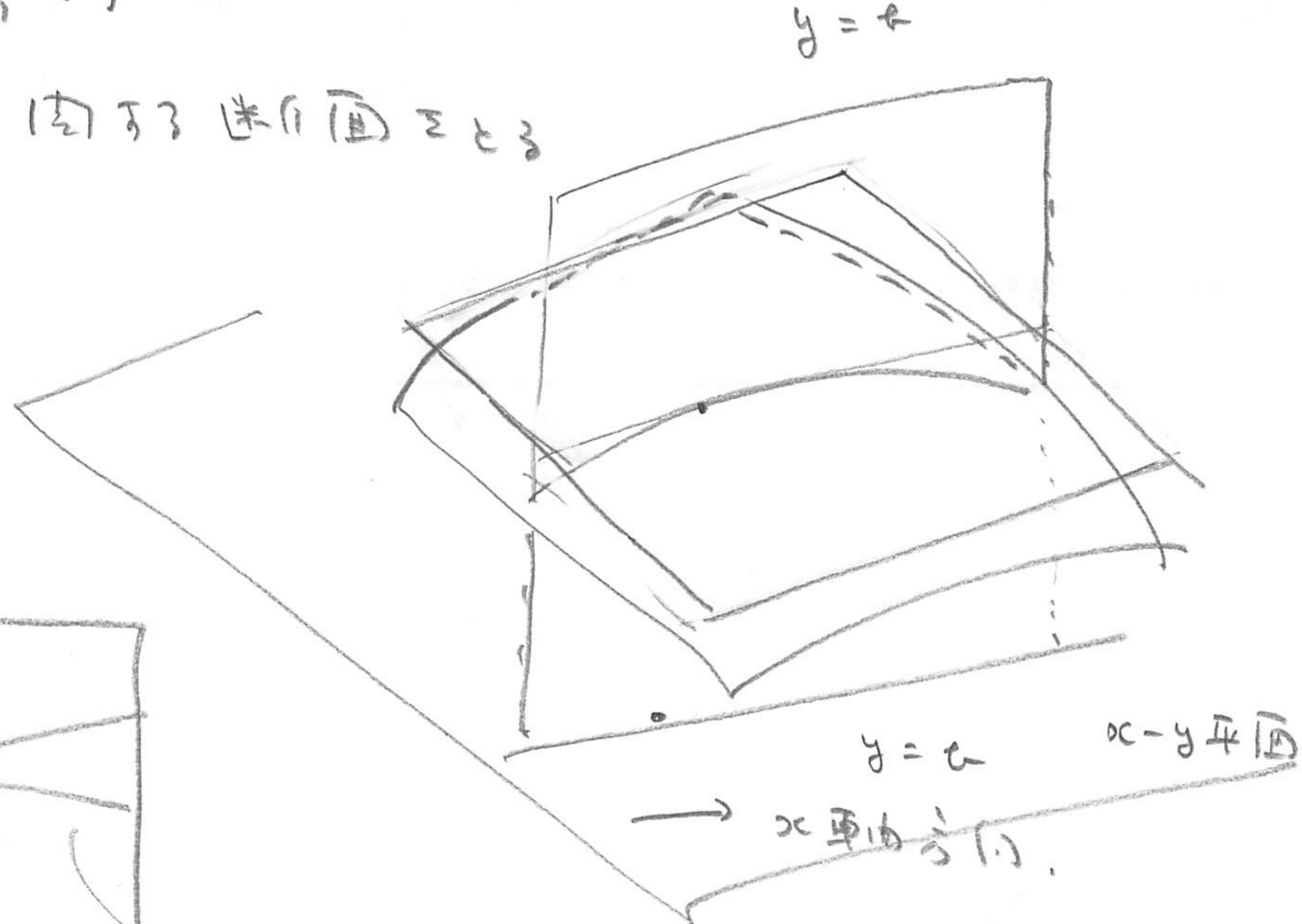
$$\left(\nabla(f)(P_0), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \right) = 0$$

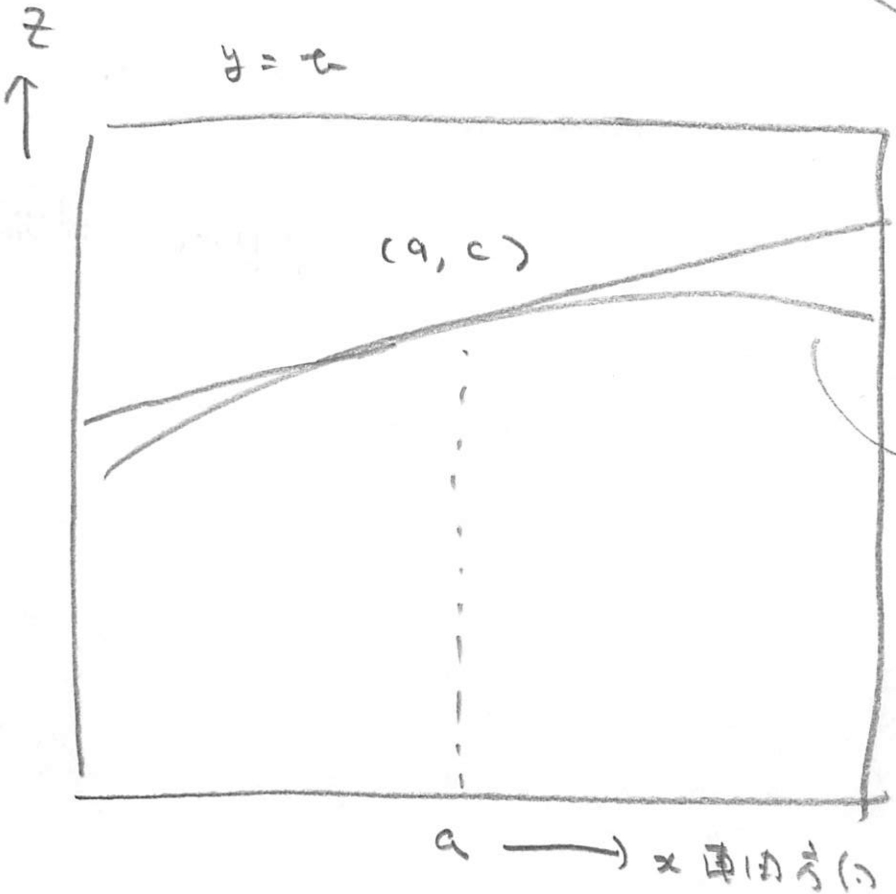
曲面 S: $g(x, y, z) = 0$

の平面 $y = t$ に関する断面をとる

$h(x, z) := g(x, t, z)$

とする





$h(x, z) = 0$

接線は $z = -\dfrac{h_x(a, c)}{h_z(a, c)}(x - a) + c$

接平面を $z = A(x-a) + B(y-b) + c$

と表す。その $y = b$ による断面は

$$z = A(x-a) + c$$

例題Iを考えると

$$A = -\frac{h_x(a, c)}{h_z(a, c)} = -\frac{g_x(a, b, c)}{g_z(a, b, c)}$$

同様に断面 $x = a$ を用いると

$$B = -\frac{g_y(a, b, c)}{g_z(a, b, c)}$$

従って接平面の方程式は

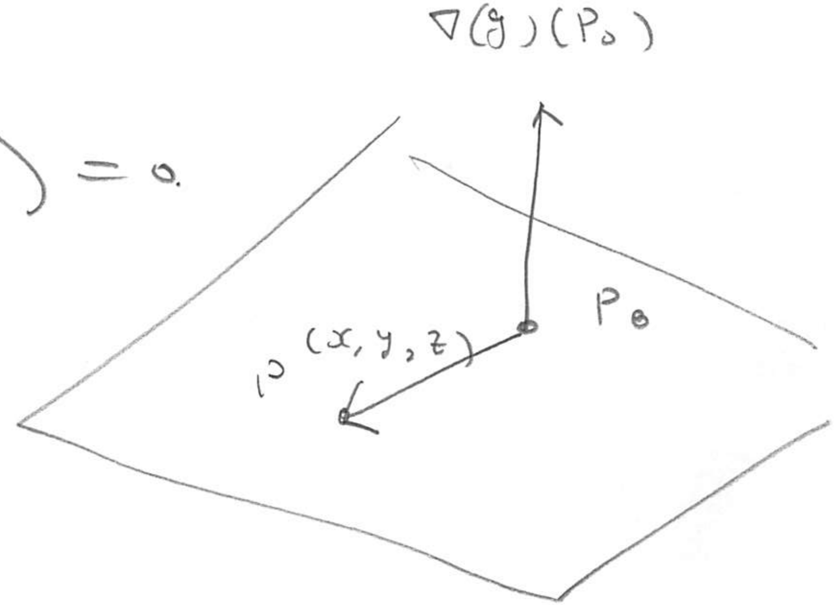
$$z = -\frac{g_x(P_0)}{g_z(P_0)}(x-a) - \frac{g_y(P_0)}{g_z(P_0)}(y-b) + c$$

すなわち

$$g_x(P_0)(x-a) + g_y(P_0)(y-b) + g_z(P_0)(z-c) = 0$$

勾配ベクトル $\nabla(g) = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}$ を用いると

$$\left(\nabla(g)(P_0),\ \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \right) = 0.$$



例) 単位球面 $S: g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y, \quad g_z = 2z$$

なので $P_0(a, b, c)$ における接平面は

$$2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ であることを用いると

$$ax + by + zc = 1$$