複素数ベクトルの内積とノルム

Unitary 行列，エルミート行列

Nobuyuki TOSE

V003b L17 Dec 2020

定義

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

に対してエルミート内積とノルムを

$$\begin{aligned} (\vec{z}, \vec{w}) &= z_1 \bar{w}_1 + \ldots + z_n \bar{w}_n \\ \|\vec{z}\|^2 &= (\vec{z}, \vec{z}) = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 \end{aligned}$$

によって定義します.

性質

内積の性質

- $(\vec{u}+\vec{v},\vec{z})=(\vec{u},\vec{w})+(\vec{v},\vec{w})$
- $(\vec{u},\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u},\vec{v})+(\vec{u},\vec{w})$
- $(\lambda\vec{u},\vec{v})=\lambda(\vec{u},\vec{v})$, $(\vec{u},\lambda\vec{v})=\bar{\lambda}(\vec{u},\vec{v})$
- $(\vec{v},\vec{u})=\overline{(\vec{u},\vec{v})}$

ノルムの性質

- $\|\vec{z}\|\geq 0$, $\|\vec{z}\|=0\Leftrightarrow\vec{z}=\vec{0}$

随伴行列

$U \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ とします. $U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{pmatrix} = (\vec{u}_1 \ \cdots \ \vec{u}_n)$ のとき

$$U^* := \left({}^t\bar{\mathbf{u}}_1 \ \cdots \ {}^t\bar{\mathbf{u}}_m\right) = (\mathbf{u}_1^* \ \cdots \ \mathbf{u}_m^*) = \begin{pmatrix} (\vec{u}_1)^* \\ \vdots \\ (\vec{u}_n)^* \end{pmatrix}$$

を U の**随伴行列** (adjoint) と呼びます.

定理 $\vec{z} \in \mathbf{C}^n, \vec{w} \in \mathbf{C}^m$ に対して

$$(U\vec{z}, \vec{w}) = (\vec{z}, U^*\vec{w})$$

エルミート行列

n 次正方行列 $T \in M_n(\mathbf{C})$ が
$$T^* = T$$
を満たすとき，T を**エルミート行列**と呼びます.

定理 $T \in M_n(\mathbf{C})$ がエルミートであるとします．このとき
$$\Phi_T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$$

証明 ある $\vec{z} \neq \vec{0}$ に対して
$$T\vec{z} = \alpha\vec{z}$$
$$(T\vec{z}, \vec{z}) = (\vec{z}, T^*\vec{z}) = (\vec{z}, T\vec{z})$$
において
$$(T\vec{z}, \vec{z}) = (\alpha\vec{z}, \vec{z}) = \alpha\|\vec{z}\|^2, \quad (\vec{z}, T\vec{z}) = (\vec{z}, \alpha\vec{z}) = \bar{\alpha}\|\vec{z}\|^2$$
から $\alpha = \bar{\alpha}$

実対称行列の固有値はすべて実数

定理 実正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ が対称とします：${}^tA = A$. このとき

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$$

証明 $\bar{A} = A$ なので

$$A^* = {}^tA = A$$

から A はエルミートであることが分かります.

Unitary 行列 (1)

$U \in M_n(\mathbf{C})$ が Unitary であるとは

$$U^* U = UU^* = I_n \tag{1}$$

が成立するときである．$U^* U = I_n$ とすると

$$\begin{aligned} 1 &= \det(U^* U) = \det(U^*) \det(U) = \det(\bar{U}) \det(U) \\ &= \overline{\det(U)} \cdot \det(U) = |\det(U)|^2 \end{aligned}$$

から

$$|\det(U)| = 1$$

特に U は正則であることが分かります．これから

$$(1) \Leftrightarrow (1)' \; U^* U = I_n$$

Unitary 行列 (2)

$U = (\vec{u}_1 \ \cdots \ \vec{u}_n)$ に対して

$$
\begin{aligned}
U^* U &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \\ \vdots \\ \vec{u}_n^* \end{pmatrix} (\vec{u}_1 \ \cdots \ \vec{u}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \vec{u}_1^* \vec{u}_1 & \vec{u}_1^* \vec{u}_2 & \cdots \\ \vec{u}_2 * + \vec{u}_1 & \vec{u}_2^* \vec{u}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

従って

$$
U^* U = I_n \Leftrightarrow (\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}
$$

から

$$
(1) \Leftrightarrow \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \text{は正規直交系}
$$

Unitary 行列 (3)

$$(U\vec{z}, U\vec{w}) = (U^* U\vec{z}, \vec{w})$$

が任意の $\vec{z}, \vec{w} \in \mathbf{C}^n$ に対して成立することから

$$(1) \Leftrightarrow (U\vec{z}, U\vec{w}) = (\vec{z}, \vec{w}) \ \ (\vec{z}, \vec{w} \in \mathbf{C}^n)$$