

行列式の定義 (1)—3 次の場合に復習と拡張

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08, 2019 年 09 月 27 日 at Komaba
V03c SLIN2020Lec08, 2020 年 09 月 25 日 at Komaba

3次行列式 (復習)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

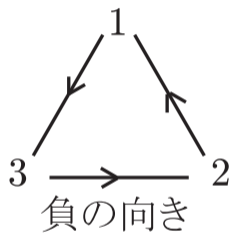
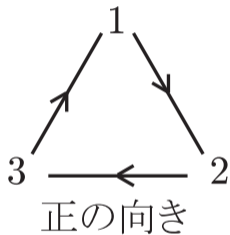
$$|\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}| := \sum_{(i \ j \ k) \in S_3} \varepsilon(i \ j \ k) \cdot a_i b_j c_k$$

ここで $(i \ j \ k) \in S_3$ は 1, 2, 3 を並べた順列全体を動きます. また

$$\varepsilon(i \ j \ k) = \begin{cases} 1 & (i \ j \ k) \text{が正の向き} \\ -1 & (i \ j \ k) \text{が負の向き} \end{cases}$$

と順列の符号を定めます.

順列の偶奇



順列とその符号を言い換える (1)

例えば負の向きの順列 $(1\ 3\ 2)$ は全単射

$$\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

で

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$$

であるものと考えます (**置換**と呼びます). そして

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

と表します. これは2と3を交換する**互換**と呼ばれ $(2\ 3)$ と表します.



順列とその符号を言い換える (2)—負の向きの順列

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の場合, 2 と 1 を交換する互換で (1 2) と表します.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の場合, 1 と 3 を交換する互換で (1 3) と表します. あみだで表すと

$$(1\ 3) = (2\ 3) \circ (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

とから右図となります.



順列とその符号を言い換える (3)—正の向きの順列

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合, $\{1, 2, 3\}$ の上の恒等写像で **1** と表します.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の場合,

$$\sigma = (1\ 2) \circ (2\ 3)$$

と 2 個の互換の合成で表されます.



順列とその符号を言い換える (4)—正の向きの順列

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合,

$$\sigma = (2\ 3) \circ (1\ 2)$$

と 2 個の互換の合成で表されます.



順列とその符号を言い換える (5)—符号について

定理 $\sigma \in S_3$ とします. 互換 $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell, \tau_1, \dots, \tau_{\ell'}$ に対して

$$\sigma = \sigma_\ell \circ \dots \circ \sigma_1 = \tau_{\ell'} \circ \dots \circ \tau_1$$

が成立するならば

$$\ell \equiv \ell' \pmod{2}$$

証明は 3 次の場合を含む一般の場合に与えます.

応用—固有多項式 (1)

3次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) := \det(\lambda I_3 - A)$$

を考えます. $B(\lambda) := (b_{ij}(\lambda)) = \lambda I_3 - A$ とおきます. このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{2\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda)$$

となります. この右辺の和の項について $\sigma \in S_3$ が $\sigma \neq \mathbf{1}$ ならば

$$\text{ord} (b_{\sigma(1)1}(\lambda) b_{\sigma(2)2}(\lambda) b_{\sigma(3)3}(\lambda)) \leq 1$$

応用—固有多項式 (2)

$\sigma \neq \mathbf{1}$ のとき

$$j := \sigma(i) \neq i \quad \text{ならば} \quad \sigma(j) \neq \sigma(i) = j$$

であるからである. 例えば

$$\sigma(1) = 2 \neq 1 \quad \text{ならば} \quad \sigma(2) \neq 2$$

実際

$$\sigma(2) = 1 \text{ または } 3$$

$\sigma = \mathbf{1}$ のとき

$$\begin{aligned} b_{\sigma(1)1}(\lambda)b_{\sigma(2)2}(\lambda)b_{\sigma(3)3}(\lambda) &= b_{11}(\lambda)b_{22}(\lambda)b_{33}(\lambda) \\ &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \end{aligned}$$

$j \setminus i$	1	2	3
1			
2	*		
3			

定理 3次正方行列 $A = (a_{ij}) = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + * \lambda - \det(A)$$

定数項については

$$\Phi_A(0) = |-\vec{a}_1 \ -\vec{a}_2 \ -\vec{a}_3| = -|\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3| = -\det(A)$$