行列式の定義 (2)—置換の符号

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08, 2019 年 09 月 27 日 at Komaba
SLIN2020Lec09, 2020 年 10 月 2 日 at Komaba

反転数 (1)

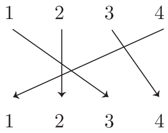
定義　n 次の置換 $\sigma \in S_n$ と $1 \leq i < j \leq n$ を満たす (i,j) に対して

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

が成立するとき，(i,j) は σ で反転されると言います.

定義 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ に対して

$$\sigma(1) = 3 > 2 = \sigma(2) \quad \sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(4)$$
$$\sigma(2) = 2 > 1 = \sigma(4) \quad \sigma(3) = 4 > 1 = \sigma(4)$$



から $(1,2)$, $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$ が σ によって反転されます.

反転数 (2)

定義 $\sigma \in S_n$ に対して反転される (i, j) の個数を反転数と呼びます．反転数が偶数の場合 σ を偶置換，反転数が奇数の場合 σ を奇置換と呼びます．さらに σ の符号を

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{が偶置換}) \\ -1 & (\sigma\text{が奇置換}) \end{cases}$$

と定義します.

反転数 (3)–S_3 の場合 (1)

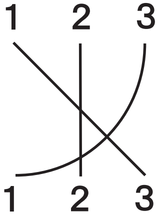
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

反転数 $= 1$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

反転数 $= 1$

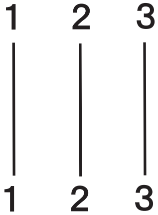
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



反転数 $= 3$

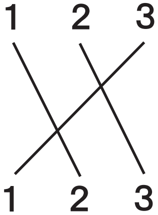
反転数 (4)–S_3 の場合 (2)

$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



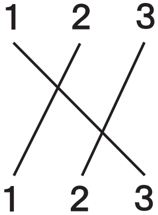
反転数 $= 0$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



反転数 $= 2$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



反転数 $= 2$

総和と積の記号 (1)

有限集合 $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ とその上の関数

$$f : \ \Omega \to \mathbf{K}$$

に対して

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_1) + \ldots + f(\omega_n)$$

$$\prod_{\omega \in \Omega} f(\omega) = f(\omega_1) \cdots f(\omega_n)$$

を定義します.

2 点集合

$\{1, 2, \ldots, n\}$ の2 点集合全体の集合

$$\Omega_n := \{\{i, j\};\ \ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j\}$$

を定義します．具体的には

$$\Omega_3 := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

$$\Omega_4 := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

2点集合による符号 (1)

$\sigma \in S_n$ に対して

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) := \prod_{\{i,j\}\in\Omega_n, i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

例えば $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ のときは

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}(\sigma) &= \frac{3-2}{1-2}\cdot\frac{3-4}{1-3}\cdot\frac{3-1}{1-4}\cdot\frac{2-4}{2-3}\cdot\frac{2-1}{2-4}\cdot\frac{4-1}{3-4} \\
&= (-1)\frac{2-3}{1-2}\cdot\frac{3-4}{1-3}\cdot(-1)\frac{1-3}{1-4}\cdot\frac{2-4}{2-3}\cdot(-1)\frac{1-2}{2-4}\cdot(-1)\frac{1-4}{3-4} \\
&= (-1)^4 = +1
\end{aligned}$$

2 点集合による符号 (2)

- $\{i, j\} \in \Omega_n$ のとき $i \neq j$ から $\sigma(i) \neq \sigma(j)$, 従って $\{\sigma(i), \sigma(j)\} \in \Omega_n$
- $\sigma^{\#}: \ \Omega_n \to \Omega_n \ \{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ は全単射
- $\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \pm 1$
- $\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$

置換の積

$\sigma, \tau \in S_n$ は全単射

$$\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \tau : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$$

で，その合成

$$\tau \circ \sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\} \quad i \mapsto \tau(\sigma(i))$$

も全単射で

$$\tau \circ \sigma \in S_n$$

これを $\tau\sigma \in S_n$ と記します.

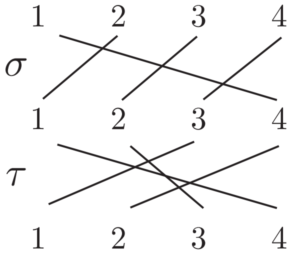
置換の積—例・結合法則

例

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



結合法則 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ に対して

$$(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$$

置換の逆

$\sigma \in S_n$ は全単射

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

ですから，その逆写像

$$\sigma^{-1} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

も全単射で，$\sigma^{-1} \in S_n$ であることが分かります．このとき

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathbf{1}$$

が成立します．

総和と積の記号 (2)

(I) 有限集合 Ω と写像

$$f : \Omega \to \mathbf{K}, \quad g : \Omega \to \mathbf{K}$$

があるとき

$$\prod_{\omega \in \Omega} f(\omega) g(\omega) = \left(\prod_{\omega \in \Omega} f(\omega) \right) \cdot \left(\prod_{\omega \in \Omega} g(\omega) \right)$$

(II) 全単射 $\varphi : \Omega \to \Omega$ があるとき

$$\prod_{\omega \in \Omega} f(\varphi(\omega)) = \prod_{\omega \in \Omega} f(\omega)$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\varphi(\omega))$$

置換の積と符号

定理 $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対して
$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\sigma') &= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{(\sigma\sigma')(i) - (\sigma\sigma')(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \cdot \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i)) - \sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i) - \sigma'(j)} \cdot \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{k,\ell\},k<\ell} \frac{\sigma(k) - \sigma(\ell)}{k-\ell} \cdot \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma'(i) - \sigma'(j)}{i-j} = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma')
\end{aligned}$$

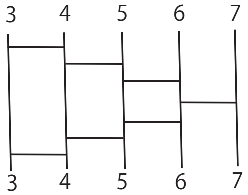
互換の符号 (1)

定理 互換 $\tau = (k\ \ell) \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\tau) = -1$$

- 隣接互換 $\tau = (i\ i+1)$ に対して $\varepsilon(\tau) = -1$
- $i < j$ のとき

$$(i\ j) = (i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-2\ j-1)$$
$$(j-1\ j)(j-2\ j-1)\cdots(i+1\ i+1)(i\ i+1)$$



互換の符号 (2)

定理　$\sigma \in S_n$ は有限個の互換 $\tau_1, \cdots, \tau_\ell$ の積（合成）として

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_\ell$$

と表せます.

証明は n に関する帰納法によります.
$\sigma(n) = i_0$ のとき $\tau_1 = (i_0\ n)$ とします．このとき

$$\tau_1\sigma(n) = n \quad \text{なので} \quad \tau_1\sigma \in S_{n-1}$$

従って

$$\tau_1\sigma = \tau_2 \cdots \tau_\ell$$

を満たす互換 $\tau_2, \ldots, \tau_\ell \in S_{n-1}$ が存在します．$\tau_1^2 = \mathbf{1}$ なので

$$\sigma = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_\ell$$

互換の符号 (2)

定理 $\sigma \in S_n$ が互換の積として

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_\ell = \tau_1' \cdots \tau_{\ell'}'$$

と 2 通りに表現されているとします．このとき ℓ と ℓ' の偶奇は一致します．

巡回置換

$k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2, \cdots, n\}$ はお互いに異なるとします.

$$\sigma(k_1) = k_2,\ \sigma(k_2) = k_3, \ldots, \sigma(k_{r-1}) = k_r,\ \sigma(k_r) = k_1$$

と

$$\sigma(i) = i \quad (i \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_r\})$$

で定義される置換を $\sigma = (k_1 \ \cdots \ k_r)$ と記します（巡回置換）.

$$\begin{array}{ccccc} & k_r & \nearrow\ k_1\ \searrow & k_2 & \\ \nearrow & & & & \searrow \\ k_{r-1} & & & & k_3 \\ \nwarrow & & & & \swarrow \end{array}$$

巡回置換 (2)

定理任意の $\sigma \in S_n$ は巡回置換の積で表せます.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

を考えます．1 から始めて σ で動かしていくと,

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 1$$

と 1 に戻ります．さらにここに現れていない数 $2, 5, 6, 8$ のうちで最小である 2 から始めて，σ で動かしていくと

$$2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2$$

と 2 に戻ります．今まで現れていない 8 は $8 \xrightarrow{\sigma} 8$ とそれ自身に写ります．このことから

$$\sigma = (1\ 3\ 9\ 7\ 4)(2\ 6\ 5)$$

巡回置換 (3)

巡回置換は互換の積で表せます. 実際，$k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2 \cdots, n\}$ がお互いに異なるとするとき

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r)(k_1\ k_{r-1}) \cdots (k_1\ k_2)$$

が成立します．これは次から分かります.

$$(k_1\ k_r)(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}) = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}\ k_r)$$