行列式の定義 (2)—行列式とその性質

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba
SLIN2020Lec10，2020 年 10 月 09 日 at Komaba

行列式の定義

n 次正方行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ の行列式を

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

4 次正方行列の場合は

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4}$$

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)}$$

転置行列の行列式 (1)

上で $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ に対応する項は $\sigma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} a_{\sigma(4)4} &= -a_{41} a_{12} a_{23} a_{34} \\
&= -a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} \\
&= \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)} a_{4\sigma^{-1}(4)}
\end{aligned}$$

一般には $\sigma \in S_n$ と $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

さらに写像

$$S_n \to S_n \quad \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

は全単射であることを用いて

転置行列の行列式 (2)

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$
$$= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}$$

これから $n = 4$ のとき

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \sum_{\tau \in S_4} \varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)} b_{\tau(2)} c_{\tau(3)} d_{\tau(4)} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix}$$

転置行列の行列式 (3)

一般的には $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

行と列の置換 (1)

$A = (\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \in M_n(\mathbf{K})$ と $\sigma \in S_n$ に対して

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

- $\sigma(i) = 1$ のとき $i = \sigma^{-1}(1)$ なので $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(\sigma^{-1}(1))1}$
- $\sigma(i) = 2$ のとき $i = \sigma^{-1}(2)$ なので $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(\sigma^{-1}(2))2}$
- $\sigma(i) = j$ のとき $i = \sigma^{-1}(j)$ なので $a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(\sigma^{-1}(j))j}$

なので

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\tau) \cdot a_{\tau(1)\sigma(1)} a_{\tau(2)\sigma(2)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\ &= \varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\tau\sigma^{-1}(1)1} a_{\tau\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n} \end{aligned}$$

行と列の置換 (2)

$$
\begin{aligned}
&\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \ \cdots \ \vec{a}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\tau\sigma^{-1}(1)1} a_{\tau\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \varepsilon(\sigma) \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau\sigma^{-1}) \cdot a_{\tau\sigma^{-1}(1)1} a_{\tau\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n} \\
&= \varepsilon(\sigma) \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) \cdot a_{\rho(1)1} a_{rho(2)2} \cdots a_{\rho(n)n} \\
&= \varepsilon(\sigma) \det(\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n)
\end{aligned}
$$

行と列の置換 (3)

(II)（列に関する交代性）

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)} \quad \cdots \quad \vec{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot \det(\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \vec{a}_n) \tag{1}$$

特に $\sigma \in S_n$ が互換 $(i\ j)$ であるとき

$$\det(\cdots \quad \vec{a}_i \quad \cdots \quad \vec{a}_j \quad \cdots) = -\det(\cdots \quad \vec{a}_j \quad \cdots \quad \vec{a}_i \quad \cdots) \tag{2}$$

(II)（行に関する交代性）

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{\sigma(n)} \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}, \quad \text{特に } i \neq j \text{ のときに } \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix} \tag{3}$$

行と列の置換 (4)

(IV) 異なる 2 列（2 行）が等しい行列の行列式は 0 となります.

$$\left|\cdots\vec{a}\cdots\vec{a}\cdots\right| = 0, \quad \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$$

三角行列の行列式・正規性

$$\begin{vmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 & 0 \\ * & * & \gamma & 0 \\ * & * & * & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

特に

(III)（正規性）

$$\det(I_n) = 1$$

多重線型性 (1)—補題

（列の場合） $F: \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$

$$\vec{x} \mapsto F(\vec{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

は $F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$ を満たします.

（行の場合） $F: (\mathbf{K}^n)^* \longrightarrow \mathbf{K}$

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

は $F(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda F(\mathbf{x}) + \mu F(\mathbf{y})$ を満たします.

多重線型性 (2)

(I)（行と列に関する線型性）　行列式の各列，各行に関して線型性が成立して，第 j 列の（第 i 行の）足し算とスカラー倍と行列式の操作は交換します．

$$\left| \cdots \lambda \vec{b}_j + \mu \vec{c}_j \ \ \cdots \right| = \lambda \cdot \left| \cdots \vec{b}_j \ \ \cdots \right| + \mu \cdot \left| \cdots \vec{c}_j \ \ \cdots \right|$$

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \lambda \mathbf{b}_i + \mu \mathbf{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

行列式の計算 (1)—掃き出し法

(V)　$i \neq j$ のとき i 列（i 行）の λ 倍を j 列（j 行）に加えても行列式の値は変わりません．

$$|\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j \cdots| = |\cdots \vec{a}_i \cdots \vec{a}_j + \lambda \vec{a}_i \cdots|, \quad \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

行列式の計算 (2)—掃き出し法

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 26 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{247}{15} \end{vmatrix} = -247$$

行列の積と行列式

(VI) 行列の積と行列式　行列の積と行列式は交換します．すなわち，n 次正方行列 $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

次のスライドにある行列式の普遍性から証明されます.

行列式の普遍性 (1)

定理（行列式の普遍性）$\mathbf{K}^n$ の n 個の直積から実数の値を取る写像

$$F: \ \mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

が次の性質 **(i)** と **(ii)** を満たすとします.
(i)（多重線型性）

$$F(\cdots, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \cdots) = \lambda F(\cdots, \vec{x}, \cdots) + \mu F(\cdots, \vec{y}, \cdots)$$

(ii)（交代性）$i \neq j$ において

$$F(\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots) = -F(\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots)$$

このとき $F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \cdot F(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$

行列式の普遍性 (2)

注意上で F の代わりに $(\mathbf{K}^n)^*$ の n 個の直積上定義された
$G\colon (\mathbf{K}^n)^* \times \cdots \times (\mathbf{K}^n)^* \to \mathbf{K}$ をを考えると，多重線型性と交代性を仮定するならば

$$G(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \cdot G(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

が成立します.

行列式の普遍性 (3)

(ii) から

$$F(\cdots, \vec{a}, \cdots, \vec{a}, \cdots) = 0$$

$n = 4$ のとき

$$\begin{aligned} F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) &= F(\sum_{i=1}^{4} a_i \vec{e}_i, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \sum_{i=1}^{4} a_i F(\vec{e}_i, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \\ &= \sum_{i=1}^{4} a_i F(\vec{e}_i, \sum_{j=1}^{4} b_j \vec{e}_j, \vec{c}, \vec{d}) = \sum_{1 \le i,j \le 4} a_i b_j F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{c}, \vec{d}) \\ &= \cdots = \sum_{1 \le i,j,k,\ell \le 4} a_i b_j c_k d_\ell F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell) \end{aligned}$$

最右辺の総和において $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$ とならない限り $F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell) = 0$

行列式の普遍性 (4)

ここで $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix}$ とすると

$$F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_\ell) = F(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}, \vec{e}_{\sigma(4)}) = \varepsilon(\sigma) \cdot F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

従って

$$\begin{aligned} F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) &= \sum_{\sigma \in S_4} a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} F(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}, \vec{e}_{\sigma(4)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} \cdot \varepsilon(\sigma) F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \\ &= F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)} d_{\sigma(4)} \\ &= F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) \det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c} \ \vec{d}) \end{aligned}$$

公式 (VI) を示す (1)

$A,\ B \in M_n(\mathbf{K})$ とします．このとき

$$F : \mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

を定義式

$$F(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) := \det(A\vec{b}_n \ \cdots \ A\vec{b}_n)$$

によって定めます．このとき

$$\begin{aligned} F(\ldots, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \ldots) &= |\cdots \ A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \ \cdots| = |\cdots \ \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} \ \cdots| \\ &= \lambda|\cdots \ A\vec{x} \ \cdots| + \mu|\cdots \ A\vec{y} \ \cdots| \\ &= \lambda \cdot F(\ldots, \vec{x}, \ldots) + \mu \cdot F(\ldots, \vec{y}, \ldots) \end{aligned}$$

と普遍性の定理の **(i)** が OK．また $i < j$ のとき

$$\begin{aligned} F(\ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{b}_j, \ldots) &= \left|\cdots \ A\vec{b}_i \ \cdots \ A\vec{b}_j \ \cdots\right| = -\left|\cdots \ A\vec{b}_j \ \cdots \ A\vec{b}_i \ \cdots\right| \\ &= -F(\ldots, \vec{b}_j, \ldots, \vec{b}_i, \ldots) \end{aligned}$$

から普遍性の定理の **(ii)** も OK．

公式 (VI) を示す (2)

普遍性の定理を適用して

$$F(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = F(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) \cdot \det(\vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n)$$

となります．さらに

$$F(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \det(A\vec{e}_1 \ \ldots \ A\vec{e}_n) = \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n)$$

よって

$$\left| A\vec{b}_1 \ \cdots \ A\vec{b}_n \right| = |\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n| \cdot \left| \vec{b}_1 \ \cdots \ \vec{b}_n \right|, \quad \text{すなわち } |AB| = |A| \cdot |B|$$

普遍性の定理の応用 (1)

$A \in M_n(\mathbf{K})$ と $B \in M_m(\mathbf{K})$，$C \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array} \right) = \det(A) \cdot \det(B)$$

普遍性の定理の応用 (2)

$$F: \mathbf{K}^n \times \cdots \times \mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

$$F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) := \det \left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array} \right)$$

は普遍性の定理の **(i)** と **(ii)** を満たします．よって

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array} \right) \\ = \; & \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \cdot \det \left(\begin{array}{ccc|c} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array} \right) \\ = \; & \det(A) \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array} \right) \end{aligned}$$

普遍性の定理の応用 (3)

$$G(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m) = \left| \begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_m \end{array} \right|$$

と定義すると，行に関する普遍性の定理（注意）が適用できて

$$G(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m) = \det(B) \det \left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & I_m \end{array} \right) = \det(B)$$

普遍性の定理の応用 (4)

特に $B \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \det(B) \tag{4}$$

普遍性の定理の応用 (5)

以上と同様に $A \in M_n(\mathbf{K})$ と $B \in M_m(\mathbf{K})$，$C \in M_{m.n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & O_{n,m} \\ \hline C & B \end{array}\right) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{5}$$

が成立します．このことから $B \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \end{array}\right) = \det(B) \tag{6}$$