3 次正方行列の対角化

Nobuyuki TOSE

V003 intro L03, emath L03 2020

対角化可能の十分条件

定理 1

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{K})$ の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

が条件

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$$

を満たすとします．このとき<u>正則な</u>$P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

と対角化されます．

対角化可能の十分条件（証明）

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2,\ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

$$\vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j = 1, 2, 3)$$

を満たす $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in \mathbf{K}^3$ が存在します．次の定理 2 を用いると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則となります．さらに

$$\begin{aligned} AP &= A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\alpha\vec{p}_1\ \beta\vec{p}_2\ \gamma\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

対角化可能の十分条件（証明）

定理 2

$A \in M_n(\mathbf{K})$, $\alpha_1, \ldots \alpha_\ell \in \mathbf{K}$, $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell \in \mathbf{K}^n$ が条件

$$\alpha_j \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$$

$$A\vec{p}_j = \alpha_j \vec{p}_j,\ \vec{p}_j \neq \vec{0} \quad (j = 1, \ldots, \ell)$$

を満たすとします．このとき $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ は線型独立となります．

対角化可能の十分条件（証明）

定理 2 の証明 ℓ に関する帰納法で証明します．$\ell=1$ の場合は簡単です．一般の ℓ の場合を考えます．そのために $\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_\ell$ が

$$c_1\vec{p}_1+\cdots+c_{\ell-1}\vec{p}_{\ell-1}+c_\ell\vec{p}_\ell=\vec{0} \tag{1}$$

を満たすとします．(1) の両辺に $A-\alpha_\ell I_n$ を掛けると

$$c_1(\alpha_1-\alpha_\ell)\vec{p}_1+\cdots+c_{\ell-1}(\alpha_{\ell-1}-\alpha_\ell)\vec{p}_{\ell-1}=\vec{0} \tag{2}$$

となります．帰納法の仮定から $\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_{\ell-1}$ は線型独立になります．従って (2) から

$$c_1(\alpha_1-\alpha_\ell)=\cdots=c_{\ell-1}(\alpha_{\ell-1}-\alpha_\ell)=0 \quad 従って \quad c_1=\ldots=c_{\ell-1}=0 \tag{3}$$

となります．(1) に代入すると $c_\ell\vec{p}_\ell=\vec{0}$ となりますが，これから $c_\ell=0$ も従います．

具体例 (1)—固有多項式が重根を持つ場合

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有多項式と固有空間は

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

$$V(1) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(3) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であった.

具体例 (2)—固有多項式が重根を持つ場合

$$\vec{p}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$$

とすると P は正則である．これを用いると：

$$\mathbf{R}^3 = V(1) \oplus V(3)$$

実際，任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して $\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$ と定めると

$$\vec{v} = PP^{-1}\vec{v} = P\vec{c} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 \in V(1) \oplus V(3)$$

から

$$\mathbf{R}^3 \subset V(1) \oplus V(3)$$

具体例 (3)—固有多項式が重根を持つ場合

以上で任意の $\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ に対して $\vec{v}_1 \in V(1)$, $\vec{v}_2 \in V(3)$ が存在して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

と一意的に表されます．このとき

$$f_1(\lambda) = \frac{\lambda - 3}{1 - 3} = -\frac{1}{2}(\lambda - 3), \quad f_2(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(\lambda - 1)$$

とすると

$$\vec{v}_1 = f_1(A)\vec{v} = -\frac{1}{2}(A - 3I_3)\vec{v}, \quad \vec{v}_2 = f_2(A)\vec{v} = \frac{1}{2}(A - I_3)\vec{v}$$

具体例 (4)—固有多項式が重根を持つ場合

Theorem

$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta), \quad \alpha \neq \beta$$

が成立するとします．このとき

$$1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2$$

問題設定

以下では場合分けをして考えます．$A \in M_3(\mathbf{K})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$ として

$$\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha$$

とします．以下では 3 つの場合に分けて A の対角化の必要十分条件について考えていきます．

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$
(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$
(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ の場合

- （定理 1）$\underline{A \text{ は対角化可能}}$，すなわち正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

- （スペクトル分解可能）$\underline{\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)}$

$$\mathbf{K}^3 \supset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

$$\dim V(\alpha) \geq 1,\ \dim V(\beta) \geq 1,\ \dim V(\gamma) \geq 1$$

から

$$3 = \dim \mathbf{K}^3 \geq \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) + \dim V(\gamma) \geq 1 + 1 + 1 = 3$$

となるので

$$\dim V(\alpha) = 1,\ \dim V(\beta) = 1,\ \dim V(\gamma) = 1$$

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$ の場合

- $\underline{(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3) = O_3}$

$\vec{v} \in \mathbf{R}^3$ を

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma)$$

とスペクトル分解します．このとき

$$\begin{aligned}
(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)\vec{v} &= (A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)(A-\alpha I_3)\vec{v}_1 \\
&\quad + (A-\alpha I_3)(A-\gamma I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}_2 \\
&\quad + (A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)(A-\gamma I_3)\vec{v}_3 \\
&= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}
\end{aligned}$$

(III) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ の場合

A が対角化可能ならば次のページの定理 3 から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$$

を満たす正則行列 P が存在する．このとき

- $A = \alpha I_3$
- $\mathbf{K}^3 = V(\alpha)$

定理 3

定理 3

$A \in M_3(\mathbf{K})$ が正則な P と $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

が成立するならば

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

・$\underline{1 \leq \dim V(\alpha) \leq 2}$
背理法で示す．$\dim V(\alpha) = 3$ とすると $V(\alpha) = \mathbf{K}^3$ となるが，任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して $A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ から $A = \alpha I_3$ となる．$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ となるので矛盾が生じる．
・$\underline{\dim V(\beta) = 1}$
$\dim V(\beta) \geq 1$ は明らかである．$\dim V(\beta) \geq 2$ とすると $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in V(\beta)$ が存在する．このとき $A\vec{p} = \beta\vec{P}$, $A\vec{q} = \beta\vec{q}$ となります．さらに $\vec{r} \in \mathbf{K}^3$ を選んで
$P := (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ が正則であるようにすると

$$A(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \beta & 0 & *_1 \\ & \beta & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \beta & 0 & *_1 \\ & \beta & *_2 \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

となります．このとき $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \beta)^2(\lambda - *_3)$ から矛盾が生じます．

一般には

$A \in M_n(\mathbf{K})$ の固有多項式がある $g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ を用いて

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m g(\lambda), \quad g(\alpha) \neq 0, \quad m \geq 1$$

と表されているとします．このとき

$$1 \leq V(\alpha) \leq m$$

が成立します．

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

$\dim V(\alpha) = 2$, $\dim V(\beta) = 1$ ならば A は対角化可能である.

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

となります. $V(\alpha)$ の基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, V(\beta)$ の基底 $\vec{p}_3$ をとると $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則で

$$AP = P \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha & \\ & & \beta \end{pmatrix}$$

と A は対角化されます.

II$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

A が対角化可能ならば $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$ このとき

$$\dim V(\alpha) = 2, \ \dim V(\beta) = 1$$

正則な $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$AP = P \begin{pmatrix} *_1 & & \\ & *_2 & \\ & & *_3 \end{pmatrix}$$

が成立すると $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \in V(\alpha) \oplus V(\beta)$ となります．$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が線型独立なので

$$\dim (V(\alpha) \oplus V(\beta)) = 3$$

となりますから

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

このとき $\dim V(\beta) = 1$ なので

$$\dim V(\alpha) = 3 - \dim V(\beta) = 2$$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ の場合

A が対角化可能ならば $(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3) = O_3$

このとき

$$\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$$

となります．任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 \in V(\alpha), \quad \vec{v}_2 \in V(\beta)$$

と（スペクトル）分解すると

$$(A-\beta I_3)(A-\alpha I_3)\vec{v}_1 = \vec{0}$$
$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v}_2 = \vec{0}$$

から

$$(A-\alpha I_3)(A-\beta I_3)\vec{v} = \vec{0}$$

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

$(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3$ ならば A は対角化可能

$$\frac{\lambda - \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\lambda - \beta}{\alpha - \beta} = 1$$

が（恒等的に）成立します．これから

$$\frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_3) + \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_3) = I_3$$

が成立します．（次頁に続く）

II $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

これから任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^3$ に対して

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_3)\vec{v}, \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_3)\vec{v}$$

と定めると $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ となります．さらに

$$(A - \alpha I_3)\vec{v}_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}(A - \beta I_3)(A - \alpha I_3)\vec{v} = \frac{1}{\alpha - \beta}O_3\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \beta I_3)\vec{v}_2 = \frac{1}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)\vec{v} = \frac{1}{\beta - \alpha}O_3\vec{v} = \vec{0}$$

から

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha), \ \vec{v}_2 \in V(\beta)$$

が従います．これから $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta)$

まとめ

(I) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$ の場合

- A は対角化可能
- $\mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$
- $(A - \alpha I_3)(A - \beta I_3)(A - \gamma I_3) = O_3$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2(\lambda - \beta)$ の場合

$$\begin{aligned} A\text{は対角化可能} &\Leftrightarrow \mathbf{K}^3 = V(\alpha) \oplus V(\beta) \\ &\Leftrightarrow (A - \alpha I_3)(A - \beta I_3) = O_3 \end{aligned}$$

(II) $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ の場合

$$\begin{aligned} A\text{は対角化可能} &\Leftrightarrow \mathbf{K}^3 = V(\alpha) \\ &\Leftrightarrow A = \alpha I_3 \end{aligned}$$