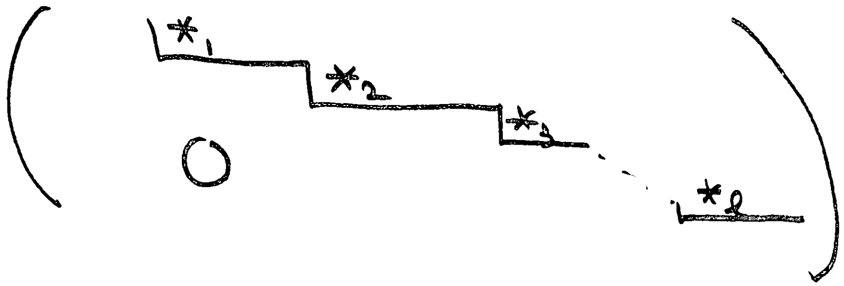
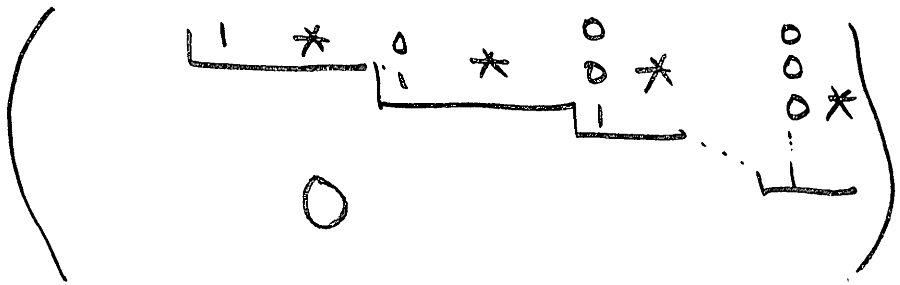
次元定理 — 補足.

階段行列



$*_j \neq 0 \quad (j=1,\dots,\ell)$

$\downarrow$ 行基本変形



定理1　$^\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ は ある特殊の階段行列に一意的に行基本変形される. このとき $\mathrm{rank}(A)=\ell$

(一意性は 教科書の演習3.3 (60P) 参照.)

定理1の証明は帰納法と次の定理2（一意性は省略）

定理2 $A \neq O_{m,n}$ ならば

$$A \to \cdots \to \left(\vec{0} \cdots \vec{0}\ \ \vec{e}_1\ \ *\right)$$ と行基本変形できる.

次に列基本変形を行う

$$\left.\begin{pmatrix} 1 \ \ * & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\ & 1 & * & 0 & * & 0 & * \\ & & & 1 & & 0 & * \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & 1 & \end{pmatrix}\right\} l\text{段} \to \cdots \to \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \vec{0} \cdots \vec{0} \\ \hline & \end{array}\right)$$

列基本変形

これから

定理3 $A \neq O_{m,n}$ ならば $\exists P \in M_m(\mathbb{K})$ $\exists Q \in M_n(\mathbb{K})$ 正則行列

$$PAQ = \left(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_l\ \ \vec{0} \cdots \vec{0}\right)$$

これを A の階数標準形と呼ぶ（ここで l の一意性を示してもよい）

定理5の状況で

・1 $P^{-1}\vec{e}_1, \dots, P^{-1}\vec{e}_l$ は Im A の基底

・2 $Q^{-1}\vec{e}_{l+1}, \dots, Q^{-1}\vec{e}_n$ は Ker A の基底

従って

$$\dim \operatorname{Im} A = l = \operatorname{rank}(A)$$

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - l = n - \dim \operatorname{Im}(A)$$

これを次元定理と呼ぶ。