

線型部分空間の基底と次元

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08, 2019年09月27日 at Komaba

2019年09月29日修正 V03

2021年10月13日 LA wL02

定義 K^n の部分集合 V が

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

を満たすとき, V を部分空間と呼ぶ.

例

$$V_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3; x + y + z = 0 \right\}$$

は部分空間です.

実際 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ ならば $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$ で

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

部分空間 (3)

例

$$V_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3; t \in \mathbf{R} \right\}$$

は部分空間です. 実際, $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V_1$ とすると $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を用いて \vec{w}_1, \vec{w}_2 は

$$\vec{w}_1 = s_1 \vec{a}, \vec{w}_2 = s_2 \vec{a}$$

と表され

$$\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 = \lambda s_1 \vec{a} + \mu s_2 \vec{a} = (\lambda s_1 + \mu s_2) \vec{a} \in V_1$$

部分空間 (4)

例 (自明な部分空間) $\{\vec{0}\}, \mathbf{K}^n$

例 A m 行 n 列の行列に対して

$$\ker(A) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n; A\vec{v} = \vec{0}\}$$

$$\text{Im}(A) := \{A\vec{v} \in \mathbf{K}^m; \vec{v} \in \mathbf{K}^n\}$$

部分空間 (5)

例 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m) := \{x_1\vec{p}_1 + \dots + x_m\vec{p}_m; x_1, \dots, x_m \in \mathbf{K}\}$$

を $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ が生成する部分空間と呼ぶ.

部分空間の基底

V は \mathbf{K}^n の部分空間で, $V \neq \{\vec{0}\}$ とします.

$\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ が V の基底であるとは V が以下の条件を満たすときです.

- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ は線型独立である.
- $L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m) = V$

部分空間の基底 (2) 一次元

定理 1 V は \mathbf{K}^n の部分空間で, $V \neq \{\vec{0}\}$ とします.

- $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ は V の基底である,
- $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_l$ は V の基底である,

と仮定します. このとき $m = l$ となります.

定理 1 は次の定理 2 から証明できます.

定理 2 $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m \in \mathbf{K}^n$, $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_l \in \mathbf{K}^n$ とします.

$$\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_l \in L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m)$$

で $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_l$ が線型独立ならば $l \leq m$ となります.

部分空間の基底 (3)—定理 2 の証明

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= c_{11}\vec{p}_1 + \dots + c_{m1}\vec{p}_m \\ \vec{q}_2 &= c_{12}\vec{p}_1 + \dots + c_{m2}\vec{p}_m \\ &\vdots \\ \vec{q}_\ell &= c_{1\ell}\vec{p}_1 + \dots + c_{m\ell}\vec{p}_m\end{aligned}$$

すなわち

$$(\vec{q}_1 \ \dots \ \vec{q}_\ell) = (\vec{p}_1 \ \dots \ \vec{p}_m) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}$$

となります. $m < \ell$ ならば $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_\ell$ は線型従属となってしまうことが次の定理 3 から従います.

部分空間の基底 (4)—定理 3

定理 3 m 行 n 列の行列 A に対して, $m < n$ ならば, ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立します.

m に関する帰納法から以下の定理 4 から定理 3 は従います. ($\vec{a}_1 = \vec{0}$ ならば $A\vec{e}_1 = \vec{0}$ となります.)

定理 4 m 行 n 列の行列 A に対して $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ならば, ある m 次正則行列 P が存在して

$$PA = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ B \\ \end{array}$$

基底の存在 (1)

定理 5 \mathbf{K}^n の部分空間 V の基底 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell$ があるとします. $\vec{v}_{\ell+1} \in \mathbf{K}^n$ が

$$\vec{v}_{\ell+1} \notin V$$

ならば $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}$ は線型独立である.

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_\ell \vec{v}_\ell + c_{\ell+1} \vec{v}_{\ell+1} = \vec{0}$$

とします. $c_{\ell+1} \neq 0$ ならば

$$\vec{v}_{\ell+1} = -\frac{1}{c_{\ell+1}} (c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_\ell \vec{v}_\ell) \in L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell) = V$$

となるので矛盾が生じる. よって $c_{\ell+1} = 0$ が従う.

基底の存在 (2)

定理 6 (基底の延長・拡張) K^n の部分空間 V, W が

$$V \subset W$$

を満たします. V の基底 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell$ に対して, W の基底

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \dots, \vec{v}_{\ell+d}$$

が存在します.

次のページのプログラムは終了するか?

基底の存在 (3)

$V_\ell = V$ とします.

(ℓ) $V_\ell = W$ ならば終了. $V_\ell \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+1} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+1} \notin V_\ell$ を満たすものが存在する. そこで

$$V_{\ell+1} = L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1})$$

と定義します.

($\ell+1$) $V_{\ell+1} = W$ ならば終了. $V_{\ell+1} \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+2} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+2} \notin V_{\ell+1}$ を満たすものが存在する. そこで

$$V_{\ell+2} = L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\ell+1}, \vec{v}_{\ell+2})$$

と定義します.

($\ell+2$) $V_{\ell+2} = W$ ならば終了. $V_{\ell+2} \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+3} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+3} \notin V_{\ell+2}$ を満たすものが存在する. そこで

$$V_{\ell+3} = L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\ell+2}, \vec{v}_{\ell+3})$$

と定義します.

基底の存在 (4)

$V = \{\vec{0}\}$, $W = V$ として上の議論を用いると定理 7 を得ます.

定理 7 K^n の部分空間 V が $V \neq \{\vec{0}\}$ を満たすとき, V には基底が存在します.

基底の存在 (5)

定理 6 の議論から定理 8 が従います.

定理 8 K^n の部分空間 V, W が

$$V \subset W$$

を満たすとします.

(i) $\dim V \leq \dim W$

(ii) $\dim V = \dim W$ ならば $V = W$

次元定理 (1)

定理 9 m 行 n 列の行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\dim \ker(A) = n - \dim \operatorname{Im}(A)$$

$\ker(A)$ の基底を $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell$ とします. これを拡張して \mathbf{K}^n の基底

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \dots, \vec{v}_n$$

とします. 任意の $\vec{w} \in \operatorname{Im}(A)$ に対して, $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$\vec{w} = A\vec{v}$$

と表せます. このとき

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_\ell \vec{v}_\ell + c_{\ell+1} \vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_n \vec{v}_n$$

と表せるので

次元定理 (2)

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= A(c_1\vec{v}_1 + \dots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_n\vec{v}_n) \\ &= c_1A\vec{v}_1 + \dots + c_\ell A\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_nA\vec{v}_n \end{aligned}$$

から $\text{Im}(A)$ は

$$\vec{w}_{\ell+1} := A\vec{v}_{\ell+1}, \dots, \vec{w}_n := A\vec{v}_n$$

で生成されます. 次に $\vec{w}_{\ell+1}, \dots, \vec{w}_n$ が線型独立であることを示します.

$$\vec{0} = c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_n\vec{v}_n = A(c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_n\vec{v}_n)$$

とすると

$$c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \dots + c_n\vec{v}_n \in \ker(A)$$

から

$$c_{\ell+1} = \dots = c_n = 0$$

次元定理 (3) — 応用

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.

- (i) $\ker(A) = \vec{0}$
- (ii) $\text{Im}(A) = \mathbf{K}^n$