# 線型部分空間の基底と次元

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

SLIN2019Lec08，2019 年 09 月 27 日 at Komaba
2019 年 09 月 29 日修正 V03, 2021 年 10 月 13 日 LA wL02 EV04
2022 年 10 月 12 日 LA wL02 EV05

# 部分空間 (0)—復習

**定義** $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ が $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとき

$$L(\vec{a}, \vec{b}) := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{K}^n;\ x, y \in \mathbf{K}\}$$

を **2 次元部分空間**と呼びました.

# 部分空間

**定義** $\mathbf{K}^n$ の部分集合 $V$ が

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \;\Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in V$$

を満たすとき，$V$ を**部分空間**と呼ぶ.

# 部分空間 (2)

**例**

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;\ x+y+z=0 \right\}$$

は部分空間です.

実際 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V_1$ ならば $\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$ で

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + \mu(x_2 + y_2 + z_2) = 0$$

# 部分空間 (3)

**例**

$$V_2 := \left\{ s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;\ s \in \mathbf{R} \right\}$$

は部分空間です．実際，$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V_2$ とすると $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ を用いて $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ は

$$\vec{w}_1 = s_1\vec{a},\ \vec{w}_2 = s_2\vec{a}$$

と表され

$$\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 = \lambda s_1\vec{a} + \mu s_2\vec{a} = (\lambda s_1 + \mu s_2)\vec{a} \in V_2$$

**例** (自明な部分空間) $\{\vec{0}\}$, $\mathbf{K}^n$

**例** $A$ $m$ 行 $n$ 列の行列に対して

$$\ker(A) := \{\vec{v} \in \mathbf{K}^n;\ A\vec{v} = \vec{0}\}$$

$$\mathrm{Im}(A) := \{A\vec{v} \in \mathbf{K}^m;\ \vec{v} \in \mathbf{K}^n\}$$

# 部分空間 (4-2) ker$(A)$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(A)$ とすると

$$A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 = \vec{0}$$

このとき

$$A(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$$

これは

$$\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$$

# 部分空間 (4-3) $\mathrm{Im}(A)$

$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathrm{Im}(A)$ とします．これは何を意味しますか？

# 部分空間 (5)

**例** $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n \in \mathbf{K}^m$ に対して

$$L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) := \{x_1\vec{p}_1 + \dots + x_n\vec{p}_n;\ x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K}\}$$

を $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_m$ が生成する $\mathbf{K}^m$ 中の部分空間と呼ぶ.

**注意** $P = (\vec{p}_1 \ \cdots \ \vec{p}_n)$ と $m \times n$ 行列を定めると

$$\mathrm{Im}(P) = L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$$

# 部分空間の基底 (1)

$V$ は $\mathbf{K}^n$ の部分空間で， $V \neq \{\vec{0}\}$ とします.
$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$ が $V$ の基底であるとは $V$ が以下の条件を満たすときです.

- $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n$ は線型独立である． *i.e.*

$$c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_m\vec{p}_n = \vec{0} \quad \text{ならば} \qquad c_1 = \cdots = c_m = 0$$

- $L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n) = V$ *i.e.* 任意の $\vec{v} \in V$ が

$$\vec{v} = c_1\vec{p}_1 + \cdots + c_n\vec{p}_n$$

と表される.

# 部分空間の基底 (2)—例

$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3;\ x + y + z = 0 \right\}$$

に対して $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_1$ とすると

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$V_1 = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$$

他方 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ の第 1,2 成分について $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ から $\vec{P}_1 \nparallel \vec{p}_2$

# 部分空間の基底 (3)—例

4 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\mathrm{Im}(A)$ を考えましょう．そのために $A$ を

$$A = (\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \vec{a}_3\ \ \vec{a}_4) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \left(\vec{b}_1\ \ \vec{b}_2\ \ \vec{b}_3\ \ \vec{b}_4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形します.

# 部分空間の基底 (4)—次元

**定理 1** $V$ は $\mathbf{K}^n$ の部分空間で，$V \neq \{\vec{0}\}$ とします．

- $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m$ は $V$ の基底である，
- $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ は $V$ の基底である，

と仮定します．このとき $m = \ell$ となります．

定理 1 は次の定理 2 から証明できます．

**定理 2** $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \in \mathbf{K}^n$, $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \in \mathbf{K}^n$ とします．

$$\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m)$$

で $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ が線型独立ならば $\ell \leq m$ となります．

# 部分空間の基底 (5)—定理 2 の証明

$$
\begin{aligned}
\vec{q}_1 &= c_{11}\vec{p}_1 + \ldots + c_{m1}\vec{p}_m \\
\vec{q}_2 &= c_{12}\vec{p}_1 + \ldots + c_{m2}\vec{p}_m \\
&\vdots \\
\vec{q}_\ell &= c_{1\ell}\vec{p}_1 + \ldots + c_{m\ell}\vec{p}_m
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix} \vec{q}_1 & \cdots & \vec{q}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \cdots & \vec{p}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}
$$

となります． $m < \ell$ ならばで $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ は線型従属となってしまうことが次の定理 3 から従います.

# 部分空間の基底 (6)—定理 3

**定理 3** $m$ 行 $n$ 列の行列 $A$ に対して，$m < n$ ならば，ある $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

が成立します.

$m$ に関する帰納法から以下の定理 4 から定理 3 は従います.（$\vec{a}_1 = \vec{0}$ ならば $A\vec{e}_1 = \vec{0}$ となります.）

**定理 4** $m$ 行 $n$ 列の行列 $A$ に対して第 1 列 $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ならば，以下の行基本変形が存在する.

$$A \to \cdots \to \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

# 部分空間の基底 (7)—定理 3 について

<u>$m=2$ のとき</u>　2 行 3 列の行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$（ここで $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^2$）に対して

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad i.e. \quad x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

に非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在する．

<u>$m=3$ のとき</u>　3 行 4 列の行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$（ここで $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbf{R}^3$）に対して

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \quad i.e. \quad x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{d} = \vec{0}$$

に非自明解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在する．

# 部分空間の基底 (8)—定理 4 から定理 3 $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき

$$A\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n = 0 \\ B \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0} \end{cases}$$

ここで $B$ は $m-1$ 行 $n-1$ 列の行列で $m-1 < n-1$ なので帰納的に

$$B \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

を満たす $v_2, \ldots, v_n \in \mathbf{R}$ が存在．さらに

$$v_1 := -b_2 v_2 - \cdots - b_n v_n$$

と定めます．

# 部分空間の基底 (9)—定理 4 の証明

$j$ 行 1 列 $a_{ji} \neq 0$ とする.

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ a_{j1} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{j1} & & \\ *_2 & & \\ \vdots & & \\ *_m & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ *_2 & & \\ \vdots & & \\ *_m & & \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

最後に $ir+ = 1r \times (-i*_i)$ $(i = 2, \cdots, m)$ を施している.

# 定理 2 の応用 (1)

**定理 2** $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m \in \mathbf{K}^n$, $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \in \mathbf{K}^n$ とします.

$$\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m)$$

で $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell$ が線型独立ならば $\ell \leq m$ となります.

**(結論の対偶)**

$$\ell > m \Rightarrow \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_\ell \quad \text{は線型従属}$$

# 定理 2 の応用 (2)

**定理** $V$, $W$ は $\mathbf{K}^n$ の線型部分空間で $V \subset W$ とします.
**(1)** $\dim V \leq \dim W$
**(2)** $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$

# 定理 2 の応用 (3)—定理の証明（その 1）

**(1)** $\dim V = \ell$, $\dim W = m$ とします．$V$ の基底が $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$, $W$ の基底が $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m$ とします.

$$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m)\text{が線型独立}$$

なので $\ell \leq m$

# 定理２の応用 (4)—定理の証明（その２）

**(2)** **<u>準備</u>$\mathbf{R}^n$** の部分空間 $V$ の基底が $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$． $\vec{q}_{\ell+1} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{q}_{\ell+1} \notin V$ ならば

$$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell, \vec{q}_{\ell+1} \text{は線型独立である}$$

**<u>準備の証明</u>**　$c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_\ell\vec{q}_\ell + c_{\ell+1}\vec{q}_{\ell+1} = \vec{0}$ とします．$c_{\ell+a} \neq 0$ ならば

$$\vec{q}_{\ell+1} = -\frac{1}{c_{\ell+1}}(c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_\ell\vec{q}_\ell) \in L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell) = V$$

と矛盾が生じます．（証明の続きは？）

# 定理 2 の応用 (5)—定理の証明（その 3）

**(2)** $V \subsetneqq W$ とします．このときある $\vec{b} \in W$ が $\vec{b} \notin V$ を満たします．**準備**を用いると

$$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell, \vec{b} \in L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_m) \text{は線型独立である}$$

ことになります．$m + 1 \leq m$ なるので矛盾が生じます．従って $V = W$ であることが分かります．

# 基底の存在 (1)

**定理 5** $\mathbf{K}^n$ の部分空間 $V$ の基底 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ があるとします． $\vec{v}_{\ell+1} \in \mathbf{K}^n$ が

$$\vec{v}_{\ell+1} \notin V$$

ならば $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}$ は線型独立である．

$$c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} = \vec{0}$$

とします． $c_{\ell+1} \neq 0$ ならば

$$\vec{v}_{\ell+1} = -\frac{1}{c_\ell + 1}(c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell) \in L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell) = V$$

となるので矛盾が生じる． よって $c_{\ell+1} = 0$ が従う．

# 基底の存在 (2)

**定理 6（基底の延長・拡張）** $\mathbf{K}^n$ の部分空間 $V$, $W$ が

$$V \subset W$$

を満たします． $V$ の基底 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ に対して， $W$ の基底

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \ldots, \vec{v}_{\ell+d}$$

が存在します．

次のページのプログラムは終了するか？

# 基底の存在 (3)

$V_\ell = V$ とします.

$(\ell)$ $V_\ell = W$ ならば終了. $V_\ell \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+1} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+1} \notin V_\ell$ を満たすものが存在する. そこで

$$V_{\ell+1} = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1})$$

と定義します.

$(\ell+1)$ $V_{\ell+1} = W$ ならば終了. $V_{\ell+1} \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+2} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+2} \notin V_{\ell+1}$ を満たすものが存在する. そこで

$$V_{\ell+2} = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{\ell+1}, \vec{v}_{\ell+2})$$

と定義します.

$(\ell+2)$ $V_{\ell+2} = W$ ならば終了. $V_{\ell+2} \subsetneq W$ ならば $\vec{v}_{\ell+3} \in W$ で $\vec{v}_{\ell+3} \notin V_{\ell+2}$ を満たすものが存在する. そこで

$$V_{\ell+3} = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{\ell+2}, \vec{v}_{\ell+3})$$

と定義します.

# 基底の存在 (4)

$V = \{\vec{0}\}$, $W = V$ として上の議論を用いると定理 7 を得ます.

**定理 7** $\mathbf{K}^n$ の部分空間 $V$ が $V \neq \{\vec{0}\}$ を満たすとき，$V$ には基底が存在します.

# 基底の存在 (5)

定理 6 の議論から定理 8 が従います.

**定理 8** $\mathbf{K}^n$ の部分空間 $V$, $W$ が

$$V \subset W$$

を満たすとします.

**(i)** $\dim V \leq \dim W$

**(ii)** $\dim V = \dim V$ ならば $V = W$

# 次元定理 (1)

**定理 9** $m$ 行 $n$ 列の行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\dim \ker(A) = n - \dim \mathrm{Im}(A)$$

$\ker(A)$ の基底を $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell$ とします．これを拡張して $\mathbf{K}^n$ の基底

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \ldots, \vec{v}_n$$

とします．任意の $\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ に対して，$\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ が存在して

$$\vec{w} = A\vec{v}$$

と表せます．このとき

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n$$

と表せるので

# 次元定理 (2)

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= A\left(c_1\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n\right) \\ &= c_1A\vec{v}_1 + \ldots + c_\ell A\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_nA\vec{v}_n \end{aligned}$$

から $\mathrm{Im}(A)$ は

$$\vec{w}_{\ell+1} := A\vec{v}_{\ell+1}, \ \ldots, \ \vec{w}_n := A\vec{v}_n$$

で生成されます．次に $\vec{w}_{\ell+1}, \ldots, \vec{w}_n$ が線型独立であることを示します．

$$\vec{0} = c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n = A(c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n)$$

とすると

$$c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \ldots + c_n\vec{v}_n \in \ker(A)$$

から

$$c_{\ell+1} = \ldots = c_n = 0$$

# 次元定理 (3)—応用

$n$ 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して以下は同値である.
**(i)** $\ker(A) = \vec{0}$
**(ii)** $\mathrm{Im}(A) = \mathbf{K}^n$