転置行列の階数

$m \times n$ 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim\left(\mathrm{Im}({}^t A)\right)$$

が成立します.

（証明） $\dim(\mathrm{Im}(A)) = r$ とすると次元定理によって

$$\dim(\ker(A)) = n - r$$

となります．さらに $\dim\left(\mathrm{Im}({}^t A)\right) = s$ とすれば $\mathrm{Im}({}^t A)$ の基底

$$\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_s$$

が存在します．ここで

$$\mathbf{b}_j = {}^t\vec{\alpha}_j \quad (j = 1, \cdots, s)$$

とすると

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b}_j \vec{x} = 0 \quad (j = 1, \cdots, s)$$

が成立します.

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_s \end{pmatrix}$$

とすると B は s 行の行列ですから

$$\mathrm{Im}(B) \subset \mathbf{K}^s$$

となります．よって

$$\dim \mathrm{Im}(B) \leq s \tag{1}$$

が従います．さらに

$$\dim \ker(B) = \dim \ker(A) = n - r$$

から次元定理を用いると

$$\dim \mathrm{Im}(B) = r$$

を得ます．以上から (1) を用いて

$$\dim \mathrm{Im}(B) = r \leq s$$

が従います．以上で

$$\dim\left(\mathrm{Im}({}^t A)\right) \leq \dim(\mathrm{Im}(A))$$

が示されましたが，${}^{t}\left({}^{t}A\right) = A$ が成立しますから

$$\dim\left(\mathrm{Im}(A)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}({}^{t}({}^{t}A))\right) \leq \dim\left(\mathrm{Im}({}^{t}A)\right)$$

を得ます．よって

$$\dim\left(\mathrm{Im}({}^{t}A)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}(A)\right)$$

が証明されました．