n 次正方行列の固有値問題

Nobuyuki TOSE

V002 Dec 27, 2019
V003 L16 Dec 112020

固有多項式 (1)

$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ の固有多項式は

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A)\\ &= \lambda^n - (a_{11} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(A)\end{aligned}$$

$n-1$ 次の係数については $\lambda I_n - A = (b_{ij}(\lambda))$ とすると

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_n - A) &= (\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})\\ &\quad + \sum_{\sigma \neq \mathbf{1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}(\lambda)\end{aligned}$$

において $\sigma \neq \mathbf{1}$ のとき

$$\mathrm{ord}\left(b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}\right) \leq n-2$$

となる.

固有多項式 (2)

$P \in M_n(\mathbf{K})$ が正則であるとき

$$\Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \Phi_A(\lambda)$$

となる．これは

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

から成立することから分かる．応用として

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

固有空間の次元 (1)

$\alpha \in \mathbf{K}$ が $\Phi_A(\alpha) = 0$ を満たすとする．さらに $g(\lambda) \in \mathbf{K}[\lambda]$ が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m g(\lambda), \quad g(\alpha) \neq 0$$

を満たすとき

$$1 \leq \dim V(\alpha) \leq m$$

固有空間の次元 (2)

$V(\alpha)$ の次元を ℓ として，基底を $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell$ とする．これを延長して正則行列

$$P = (\vec{p}_1 \ \ \dots \ \ \vec{p}_\ell \ \ \dots \ \ \vec{p}_n)$$

を構成する．このとき

$$AP = P \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \alpha & \\ \hline & & & B \end{array}\right) \quad \text{すなわち} \quad P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \alpha & \\ \hline & & & B \end{array}\right)$$

から

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^\ell \Phi_B(\lambda)$$

となりますから $\ell \leq m$

対角化可能の必要十分条件 (1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \beta_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \beta_\ell)^{m_\ell}$$

において

$$\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbf{K},\ \beta_i \neq \beta_j\ (i \neq j)$$

とします.

定理

以下の条件はすべて同値である.

(a) A は対角化可能

(b) $\mathbf{K}^n = V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell)$

(b)' $\dim V(\beta_j) = m_j\ (j = 1, \ldots, \ell)$

(c) $(A - \beta_1) \cdots (A - \beta_\ell) = O_n$

対角化可能の必要十分条件 (2) (a)⇒(b)

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$ とすると，ある番号 k に対して $\alpha_j = \beta_k$ となります．このとき

$$\vec{p}_j \in V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell)$$

従って

$$L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n) \subset V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell) \subset \mathbf{K}^n$$

において

$$\dim L(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_n) = \dim \mathbf{K}^n = n$$

から

$$V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell) = \mathbf{K}^n$$

対角化可能の必要十分条件 (3) (b)⇒(a)

$V(\beta_j)$ の基底をとって並べて正則行列 P を構成できます．このとき

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & \alpha_\ell & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \alpha_\ell \end{array}\right)$$

対角化可能の必要十分条件 (4) (b)⇔(b)'

$$(b) \Leftrightarrow n = \dim V(\beta_1) + \cdots + \dim V(\beta_\ell)$$

に注意する．さらに

$$\dim V(\beta_1) + \cdots + \dim V(\beta_\ell) \le m_1 + \ldots + m_\ell = n$$

における等号成立の条件は

$$\dim V(\beta_j) = m_j \ (j = 1, \ldots, \ell)$$

対角化可能の必要十分条件 (5) (a)⇔(c)

任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ を直和分解して

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_\ell,\ \vec{v}_j \in V(\beta_j)\ (j = 1, \ldots, \ell)$$

これに掛けると

$$(A - \beta_1 I_n) \cdots (A - \beta_\ell I_n)\vec{v} = \vec{0}$$

が分かります.

対角化可能の必要十分条件 (6) (c)⇔(a)

$$g_j(\lambda) = \prod_{k \neq j} \frac{\lambda - \beta_k}{\beta_j - \beta_k}, \quad P_j = g_j(A)$$

と定めます．このとき $g_1(\lambda) + \cdots + g_\ell(\lambda) = 1$ から

$$P_1 + \cdots + P_\ell = I_n$$

さらに (c) から

$$P_i P_j = O_n \ (i \neq j), \quad \text{さらに} \quad P_i^2 = P_i$$

も従います．これに加えて (c) から

$$(A - \beta_j I_n) P_j = O_n$$

対角化可能の必要十分条件 (7) (c)⇔(a)

前ページの最後の式から

$$\mathrm{Im}(P_j) \subset \ker(A - \beta_j I_n) = V(\beta_j)$$

となります．さらに

$$P_1 + \cdots + P_\ell = I_n,\ P_i P_j = O_n\ (i \neq j),\ P_i^2 = P_i$$

から

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(P_\ell)$$

となります．さらに

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(P_\ell) \subset V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell) \subset \mathbf{K}^n$$

から

$$\mathrm{Im}(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(P_\ell) = V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell)$$

このとき

$$\mathrm{Im}(P_j) = V(\beta_j) \quad (j = 1, \ldots, \ell)$$

も従います．