グラム行列と直交射影

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

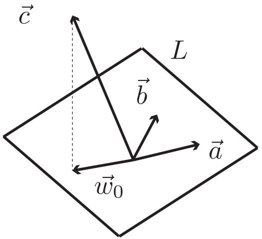
2011 年 04 月 19,26 日 at 駒場
2020 年 06 月 26 日　SLIN 2020

問題設定

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ として $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を仮定します．$\vec{a}, \vec{b}$ が張る部分空間

$$L := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{R}^n;\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

に対して $\vec{c}$ の L への直交射影 $\vec{w}_0$ を求めます.



直交射影 (1)

直交射影 $\vec{w}_0$ は条件

$$\vec{w}_0 \in L \tag{1}$$

と

$$\vec{c} - \vec{w}_0 \perp L \tag{2}$$

すなわち

$$(\vec{c} - \vec{w}_0, \vec{v}) = 0 \quad (\vec{v} \in L) \tag{3}$$

で特徴付けられます.

直交射影 (2)

$D = (\vec{a}\ \vec{b})$ として

$$\vec{w}_0 = x_0\vec{a} + y_0\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すと (3) は

$$\left(\vec{c} - D\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

となります．内積の右側の D を左側に移すと

$$\left({}^tD\vec{c} - {}^tDD\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0$$

となりますが，これが任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して成立するので

$$ {}^tDD\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = {}^tD\vec{c} \tag{4}$$

が従います．

グラム行列

${}^t\!DD$ は 2 次正方行列で成分は

$$ {}^t\!DD = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}\vec{a} & {}^t\vec{a}\vec{b} \\ {}^t\vec{b}\vec{a} & {}^t\vec{b}\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\|^2 & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & \|\vec{b}\|^2 \end{pmatrix} $$

となります．後に

$$ {}^t\!DD \text{は正則} \Leftrightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b} \tag{5} $$

であることを示します.

解答

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を仮定していますから ${}^tDD$ は正則です．従って (4) は

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \left({}^tDD\right)^{-1} {}^tD\vec{c} \quad \text{さらに} \quad \vec{w}_0 = D\left({}^tDD\right)^{-1} {}^tD\vec{c} \tag{6}$$

となります.

グラム行列の正則性 (1)

まず

$$ {}^tDD\text{は正則} \Leftrightarrow \left({}^tDD \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \right) $$

$$ \vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \left(D \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \right) $$

に注意します.

$$ \left({}^tDD \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \right) \Rightarrow \left(D \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \Rightarrow \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0} \right) $$

$D \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ ならば ${}^tDD \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ となりますから, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \vec{0}$ となります.

グラム行列の正則性 (2)

$$\left({}^tDD\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\right)\Leftarrow\left(D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\right)$$

${}^tDD\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$ とします．このとき

$$\left\|D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|^2=\left(D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\left({}^tDD\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\left(\vec{0},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=0$$

から $D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$ 従って $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}$ となります.

具体例

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$${}^tDD = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right), \quad {}^tD\vec{c} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$$

となりますから

$$\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{14} \left(\begin{smallmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{7} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$$

従って

$$\vec{w}_0 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$