2 次正方行列の Jordan 標準形

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 05 月 24 日 at 駒場

対角化可能な行列

- 2 次正方行列 A を考えます。正則行列 P に対して
$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$$
が成立します。従って
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}P$$
のとき
$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$
- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ で A が対角化可能とすると
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ すなわち $A = P \cdot \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$

固有多項式が重根をもつとき

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

から、Cayley-Hamiton の定理を用いると

$$(A - 2I_2)^2 = O_2$$

- 一般に $B \in M_2(\mathbb{R})$ が $B \neq O_2$ のときある $\vec{p} \neq \vec{0}$ に対して

$$B\vec{p} \neq \vec{0}$$

具体的には

$$B\vec{e}_1 \neq \vec{0} \quad \text{または} \quad B\vec{e}_2 \neq \vec{0}$$

固有多項式が重根をもつとき

- $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ から $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$\vec{p}_2 := (A - 2I_2)\vec{p}_1 \neq \vec{0}$$

が成立します。この両辺に $(A - 2I_2)$ を掛けると

$$(A - 2I_2)\vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

- $A\vec{p}_1 = 2\vec{p}_1 + \vec{p}_2,\ A\vec{p}_2 = 2\vec{p}_2$ から

$$A(\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = (2\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ 2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

P の正則性

- $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とします。
- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$ とする。両辺に $(A - 2I_2)$ を掛けると
$$c_1\vec{p}_2 = \vec{0}$$
となります。$\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ が従います。これから
$$c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$
が従いますが、同様の理由から $c_2 = 0$ を得ます。

A のジョルダン標準形

- 以上から、正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

が成立します。この右辺を A のジョルダン標準形と呼びます。

一般に

- **定理**　$A \in M_2(\mathbb{R})$ が

$$\phi_a(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2, \quad A \neq \alpha I_2$$

を満たすとします。このとき、正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

が成立します。