第 7 講義–連立 1 次方程式の解法（Gauss の掃き出し法）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2008 年 11 月 19 日 at 駒場,
V02 MSF2019Lec 05,06 2019/05/10,17

連立 1 次方程式の表現–拡大行列

- 連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & 3 & \cdots(1) \\ x & + & 4y & - & 5z & = & 1 & \cdots(2) \\ 3x & + & 7y & - & 5z & = & 8 & \cdots(3) \end{array}\right.$$

- 拡大行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{array}\right)$
- 幾何的な表現 $x\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\-5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\8\end{pmatrix}$

必要十分な式変形

- 同値な（必要十分な）式変形
  (i) (i) 式の λ 倍を (j) 式に加える　$(i \neq j)$
  (ii) (i) 式を λ 倍　$(\lambda \neq 0)$
  (iii) (i) 式と (j) 式を交換　$(i \neq j)$
- 対応する行列の変形（行基本変形）
  (i) 第 i 行の λ 倍を第 j 行に加える　$(i \neq j)$
  (ii) 第 i 行を λ 倍　$(\lambda \neq 0)$
  (iii) 第 i 行と第 j 行を交換　$(i \neq j)$

具体的には

- (1) の −1 倍を (2) に加える。(1) の −3 倍を (3) に加える。

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 & \cdots (1) \\ x + 4y - 5z = 1 & \cdots (2) \\ 3x + 7y - 5z = 8 & \cdots (3) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x + 2y - z = 3 & \cdots (1)' = (1) \\ 2y - 4z = -2 & \cdots (2)' = (2) - (1) \\ 3x + 7y - 5z = 8 & \cdots (3)' = (3) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x + 2y - z = 3 & \cdots (1)'' = (1)' \\ 2y - 4z = -2 & \cdots (2)'' = (2)' \\ y - 2z = -1 & \cdots (3)'' = (3) - 3 \times (1)' \end{cases}$$

拡大行列では

- $2r+=(-1)\times 1r$、$3r+=(-3)\times 1r$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2r\times=\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{*} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{**} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$* = 3r+=(-1)\times 2r, ** = 1r+=(-2)\times 2r$$

以上の結果

- 元の方程式は次と同値

$$\begin{cases} x \quad\quad + 3z = 5 \\ \quad\quad y - 2z = -1 \end{cases}$$

- $z = \alpha$ とすると、全ての解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha + 5 \\ 2\alpha - 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と α でパラメータ表示される。

アルゴリズムの理解

- 別の例

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 2z & & & = & 4 \\ 2x & + & 4y & + & 4z & + & 3w & = & 5 \\ -x & - & y & + & z & & & = & -3 \\ & & y & + & 3z & + & 2w & = & -1 \end{array}\right.$$

-

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$2r+ = (-2) \times 1r, 3r+ = 1r$$

アルゴリズムの理解

- $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \underset{2r \leftrightarrow 3r}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)}$$

$$\to \underset{4r+=(-1)\times 2r}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)} \to \underset{4r\times=\frac{1}{3}}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)}$$

アルゴリズム

- $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \underset{4r+=(-2)\times 3r}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

$$\to \underset{1r+=(-2)\times 2r}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

以上から

- 与えられた方程式は

$$\begin{cases} x \qquad - 4z \qquad = 2 \\ \qquad y + 3z \qquad = 1 \\ \qquad\qquad\qquad w = -1 \end{cases}$$

- ピボットのない変数 z を $z = \alpha$ とおいて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha + 2 \\ -3\alpha + 1 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と解が α でパラメータ表示されます。