# 行基本変形と小行列式

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V001b 2020 年 07 月 03 日　SLIN 2020

# 2 次小行列

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を考えます．$i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$ であるとき

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{pmatrix}$$

# 3 次小行列

$i_1 < i_2 < i_3$, $j_1 < j_2 < j_3$ であるとき

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_3} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_3} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_3 j_1} & \cdots & a_{i_3 j_2} & \cdots & a_{i_3 j_3} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{pmatrix}$$

# 2 次小行列と行基本変形 (1)

ある 2 次小行列式に対して

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定する.

# 2 次小行列と行基本変形 (2)—(I) 行の交換 (i)

(i) $i_1 r \leftrightarrow i_2 r$ の場合

$$\begin{matrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{matrix} \to \begin{matrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{matrix}$$

このとき

$$\begin{vmatrix} a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \\ a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

# 2次小行列と行基本変形(3)—(I)行の交換(ii)

(ii) $i_1 r \leftrightarrow i_3 r$ の場合

$$
\begin{matrix}
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots & & \cdots & a_{i_3 j_1} & \cdots & a_{i_3 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots & \to & \cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_3 j_1} & \cdots & a_{i_3 j_2} & \cdots & & \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots &
\end{matrix}
$$

このとき

$$
\begin{vmatrix} a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \\ a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \neq 0
$$

# 2 次小行列と行基本変形 (4)—(I) 行の交換 (iii)

(iii) $i_2 r \leftrightarrow i_3 r$ の場合 (ii) と同様
(II) $ir\times = \lambda\ (\lambda \neq 0)$ これは簡単なので省略

# 2次小行列と行基本変形(5)—(III) $ir+ = i'r \times \lambda$

(i) $i_1 r+ = i_2 r \times \lambda$ $(\lambda \neq 0)$ の場合

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\to
\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_1 j_1} + \lambda a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} + \lambda a_{i_2 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

このとき

$$
\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} + \lambda a_{i_2 j_1} & a_{i_1 j_2} + \lambda a_{i_2 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \neq 0
$$

# 2 次小行列と行基本変形 (6)—(III) $ir+ = i'r \times \lambda$

(ii) $i_1 r+ = i_3 r \times \lambda$ $(\lambda \neq 0)$ の場合

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_3 j_1} & \cdots & a_{i_3 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_1 j_1} + \lambda a_{i_3 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_2} + \lambda a_{i_3 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_2 j_1} & \cdots & a_{i_2 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & a_{i_3 j_1} & \cdots & a_{i_3 j_2} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

# 2次小行列と行基本変形(7)—(III) $ir+=i'r\times\lambda$

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1}+\lambda a_{i_3j_1} & a_{i_1j_2}+\lambda a_{i_3j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix} = 0$$

ならば

$$\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix} = 0$$

から

$$\begin{vmatrix} a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

（ここの議論が本質的である）

# 定理 1

$m \times n$ 行列 $A, B$ があるとする．$A$ から $B$ に行基本変形されるとする．

$$A \to \cdots \to B$$

**(1)** $A$ のある 2 次小行列 $A'$ に対して $\det(A') \neq 0$ ならば，$B$ のある 2 次小行列 $B''$ に対して $\det(B'') \neq 0$
**(2)** $A$ のすべての 2 次小行列 $A'$ に対して $\det(A') = 0$ ならば，$B$ のすべての 2 次小行列 $B''$ に対して $\det(B'') = 0$

# 定理 1 の応用 (1)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ とするとき

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \text{ある} i \neq j \text{に対して} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$$

$(\Leftarrow)$ $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ とすると

$$\begin{cases} a_i x & + & b_i y & = & 0 \\ a_j x & + & b_j y & = & 0 \end{cases}$$

となるが $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ から $x = y = 0$ が従う.

# 定理 1 の応用 (2)

$(\Rightarrow)$ $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から行基本変形が存在して

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とできることから分かる．（なぜできるか示せるか？）

# 定理2

$m \times n$ 行列 $A, B$ があるとする．$A$ から $B$ に行基本変形されるとする．

$$A \to \cdots \to B$$

**(1)** $A$ のある3次小行列 $A'$ に対して $\det(A') \neq 0$ ならば，$B$ のある3次小行列 $B''$ に対して $\det(B'') \neq 0$
**(2)** $A$ のすべての3次小行列 $A'$ に対して $\det(A') = 0$ ならば，$B$ のすべての3次小行列 $B''$ に対して $\det(B'') = 0$

# 定理 2 の応用 (1)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ とするとき

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\text{が線型独立} \Leftrightarrow \text{ある}\, i, j, k\,\text{に対して} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} \neq 0$$

$(\Leftarrow)$ ここでは対偶を示す． $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型従属とする．すなわち

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$$

において $\lambda \neq 0$ が成立するとしたら（$\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ の場合も同様）

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\mu}{\lambda}b_i - \frac{\nu}{\lambda}c_i & b_i & c_i \\ -\frac{\mu}{\lambda}b_j - \frac{\nu}{\lambda}c_j & b_j & c_j \\ -\frac{\mu}{\lambda}b_k - \frac{\nu}{\lambda}c_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = -\frac{\mu}{\lambda}\begin{vmatrix} b_i & b_i & c_i \\ b_j & b_j & c_j \\ b_k & b_k & c_k \end{vmatrix} - \frac{\nu}{\lambda}\begin{vmatrix} c_i & b_i & c_i \\ c_j & b_j & c_j \\ c_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = 0$$

# 定理2の応用(2)

$(\Rightarrow)$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立であることから行基本変形が存在して

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とできることから分かる．（なぜできるか示せるか？）

# 別の理解 (1)

$X = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ は以下の狭義の階段行列に行基本変形される．

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (vii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ (vii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

# 別の理解 (2)

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\mathsf{ker}(X) = \{\vec{0}\}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は LI, $\mathrm{Im}(X) = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\mathsf{ker}(X) = \mathbf{K}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, $\mathrm{Im}(X) = L(\vec{a}, \vec{b})$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\mathsf{ker}(X) = \mathbf{K}\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} \nparallel \vec{c}$, $\mathrm{Im}(X) = L(\vec{a}, \vec{c})$

# 別の理解(3)

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\quad \ker(X) = \mathbf{K}\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{K}\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

$\mathrm{Im}(X) = \mathbf{K}\vec{a}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$

(v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\quad \ker(X) = \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im}(X) = L(\vec{b}, \vec{c}), \quad \vec{b} \nparallel \vec{c}$

(vi) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\quad \ker(X) = \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{K}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(X) = \mathbf{K}\vec{b}, \quad \vec{b} \neq \vec{0}$

# 別の理解 (4)

(vii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\quad \ker(X) = \mathbf{K}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{K}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(X) = \mathbf{K}\vec{c}, \quad \vec{c} \neq \vec{0}$

(viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ $\quad \ker(X) = \mathbf{K}^3, \quad \mathrm{Im}(X) = \{\vec{0}\}$