# GS の直交化と直交補空間

Nobuyuki TOSE

December 12, 2019

# 直交射影

$V$ を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とする．$V \neq \{\vec{0}\}$ として，$V$ の正規直交基底を

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$$

が与えられているとする．このとき $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$P\vec{x} := \sum_{j=1}^{\ell} (\vec{x}, \vec{p}_j)\vec{p}_j$$

とする．このとき $1 \leq k \leq \ell$ に対して

$$\begin{aligned}(\vec{x} - P\vec{x}, \vec{p}_k) &= (\vec{x} - (\vec{x}, \vec{p}_1)\vec{p}_1 - \cdots - (\vec{x}, \vec{p}_\ell)\vec{p}_\ell, \vec{p}_k) \\ &= (\vec{x}, \vec{p}_k) - (\vec{x}, \vec{p}_k) = 0\end{aligned}$$

から $\vec{x} - P\vec{x} \perp V$

# 直交射影 (2)—一意性

「$V$ の別の正規直交基底を用いても $P\vec{x}$ は変わらない.」
実際 $\vec{x}_*, \vec{x}_\# \in V$ に対して

$$\vec{x} - \vec{x}_* \perp V,\ \vec{x} - \vec{x}_\# \perp V \Rightarrow \vec{x}_* = \vec{x}_\#$$

これは

$$\vec{x}_* - \vec{x}_\# = \{\vec{x} - \vec{x}_\#\} - \{\vec{x} - \vec{x}_*\} \perp V$$

となるが $\vec{x}_* - \vec{x}_\# \in V$ でもあるので

$$\|\vec{x}_* - \vec{x}_\#\|^2 = (\vec{x}_* - \vec{x}_\#, \vec{x}_* - \vec{x}_\#) = 0$$

から $\vec{x}_* = \vec{x}_\#$ が従う.
「$P\vec{x}$ を $\vec{x}$ の $V$ への直交射影と呼びます.」

# GS の直交化 (1)

$\mathbf{R}^n$ の部分空間 $V$ に対して基底 $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in V$ があるとします．そして $V$ の部分空間

$$V_j = L(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_j) \subset V$$

を定めます．$V_j$ に正規直交基底 $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_j$ が与えられているとします．このとき

$$\vec{r}_{j+1} := \vec{q}_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} (\vec{q}_{j+1}, \vec{p}_k)\vec{p}_k \in L(\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_j, \vec{q}_{j+1}) = V_{j+1} \subset V$$

は

$$\vec{r}_{j+1} \perp V_j$$

となります．さらに $\vec{r}_{j+1} \neq \vec{0}$ となります．もし $\vec{r}_{j+1} = \vec{0}$ ならば

$$\vec{q}_{j+1} = \sum_{k=1}^{j} (\vec{q}_{j+1}, \vec{p}_k)\vec{p}_k = *_1\vec{q}_1 + \ldots + *_j\vec{q}_j$$

となり $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_j, \vec{q}_{j+1}$ が線型独立であることに反します．

# GSの直交化 (2)

ここで

$$\vec{p}_{j+1} := \frac{1}{\|\vec{r}_{j+1}\|}\vec{r}_{j+1}$$

と定めると

$$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_j, \vec{p}_{j+1} \text{は } V_{j+1} \text{ の正規直交基底となります}$$

# 正規直交基底の存在と延長

**定理 1**

$\mathbf{R}^n$ の部分空間 $V(\neq \{\vec{0}\})$ に対して正規直交基底が存在します.

**定理 2**

$V \subset W$ を満たす $\mathbf{R}^n$ の部分空間 $V, W$ が与えられているとします.
$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell$ が $V$ の正規直交基底であるとき, $W$ の正規直交基底
$\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_\ell, \ldots, \vec{p}_m$ が存在します.

# 直交補空間 (1)

$\mathbf{R}$ の部分空間 $V$ に対して

$$V^{\perp} := \{\vec{w};\ (\vec{w}, \vec{v}) = 0\ (\vec{v} \in V)\}$$

は部分空間となります（2019L1712/07, 確認問題 VII）．これを $V$ の直交補空間と呼びます．
$\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $\vec{x}$ の $V$ への直交射影を $\vec{v}$ とすると

$$\vec{x} - \vec{v} \perp V \quad \text{i.e. } \vec{x} - \vec{v} \in V^{\perp}$$

となります．$\vec{w} := \vec{x} - \vec{v}$ と定めると

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{w},\ \vec{v} \in V, \vec{w} \in V^{\perp}$$

から

$$\mathbf{R}^n = V + V^{\perp}$$

であることが分かります．この和は直和となります．

# 直交補空間 (2)

実際

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}, \quad \vec{v}\in V,\ \vec{w}\in V^{\perp}$$

とすると

$$\|\vec{v}\|^2=(\vec{v},\vec{v})=(\vec{v},-\vec{w})=-(\vec{v},\vec{w})=0$$

から $\vec{v}=\vec{0}$, さらに $\vec{w}=-\vec{v}=\vec{0}$ であることが分かります．以上で

$$\mathbf{R}^n=V\oplus V^{\perp}$$

であることが分かります．特に

$$\dim V+\dim V^{\perp}=n$$

が成立します．