3 変数の 2 次形式の正定値性

Nobuyuki TOSE

Jan 05, 2020
V003 L14 Nov 06, 2020

復習

3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ が対称とします：${}^tA = A$
このとき (1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

(2) $\exists P \in O(3)$ が存在して

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

となる．さらに (3) 直交座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$ によって

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

となります.

2 次形式の正定値性 (0)—2 変数の場合の復習

2 次の実対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

を満たすとします．（注意：このとき $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$）
このとき以下の定理が成立します．

定理 0

以下の条件 (i),(ii),(iii) は同値．

(i) $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$ 　（A が定める 2 次形式は正定値）

(ii) $\alpha, \beta > 0$

(iii) $a > 0,\ |A| = ab - c^2 > 0$

2 次形式の正定値性 (1)

定理

以下の条件 (i),(ii),(iii) は同値.

(i) $\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$

(ii) $\alpha, \beta, \gamma > 0$

(iii) $A = \begin{pmatrix}a & p & q\\p & b & r\\q & r & c\end{pmatrix}$ のとき

$$a > 0, \ \begin{vmatrix}a & p\\p & b\end{vmatrix} > 0, \ |A| > 0$$

<u>(i)⇒ (ii)</u>

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2$$

2 次形式の正定値性 (2)

(ii)⇒ (i)

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\alpha\xi^2+\beta\eta^2+\gamma\zeta^2$$

(i)⇒ (iii) $a_{11}>0$ $A=\begin{pmatrix}a&p&q\\p&b&r\\q&r&c\end{pmatrix}$ のとき

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qxz+2ryz$$

2 次形式の正定値性 (3)

(i)$\Rightarrow$ (iii) $\begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix} > 0$

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} a & p \\ p & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

(i)$\Rightarrow$(iii) $|A| > 0$

2 次形式の正定値性 (4)

(iii)$\Rightarrow$ (i)

$$\left(A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz$$
$$= a\left(x + \frac{p}{a}y + \frac{q}{a}z\right)^2$$
$$+ \left(b - \frac{p^2}{a}\right)y^2 + \left(c - \frac{q^2}{a}\right)z^2 + 2\left(r - \frac{pq}{a}\right)yz$$

他方

$$\begin{vmatrix} a & p & q\\ p & b & r\\ q & r & c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & p & q\\ 0 & b-\frac{p^2}{a} & r-\frac{pq}{a}\\ 0 & r-\frac{pq}{a} & c-\frac{q^2}{a}\end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix} b-\frac{p^2}{a} & r-\frac{pq}{a}\\ r-\frac{pq}{a} & c-\frac{q^2}{a}\end{vmatrix}$$

2 次形式の正定値性 (5)

において $a > 0$, $|A| > 0$ から

$$\begin{vmatrix} b-\frac{p^2}{a} & r-\frac{pq}{a} \\ r-\frac{pq}{a} & c-\frac{q^2}{a} \end{vmatrix} > 0$$

さらに $\begin{vmatrix} a & p \\ p & b \end{vmatrix} = ab - p^2 > 0$ から

$$b - \frac{p^2}{a} = \frac{ab - p^2}{a} > 0$$

従って

$$\left(\begin{pmatrix} b-\frac{p^2}{a} & r-\frac{pq}{a} \\ r-\frac{pq}{a} & c-\frac{q^2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$