3 次実対称行列の対角化

Nobuyuki TOSE

V001 Jan 05, 2020
V002b L13 Oct 30, 2020

定理 1

定理 1

3 次の実対称行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ が相異なる場合：$\alpha \neq \beta$

$$V(\alpha) \perp V(\beta)$$

が成立します.

$\vec{p} \in V(\alpha)$, $\vec{q} \in V(\beta)$ とします.

$$(A\vec{p}, \vec{q}) = (\alpha\vec{p}, \vec{q}) = \alpha(\vec{p}, \vec{q})$$

$$(A\vec{p}, \vec{q}) == (\vec{p}, {}^tA\vec{q}) = (\vec{p}, A\vec{q}) = (\vec{p}, \beta\vec{q}) = \beta(\vec{p}, \vec{q})$$

から

$$(\alpha - \beta)(\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

が従います.

復習—2 次の場合

2 次の実対称行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbf{R})$ に対して以下が成立します.

1)
$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) \ \Rightarrow \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

2) 回転行列 $R \in M_2(\mathbf{R})$ が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します.

定理 2

定理 2

3 次の実対称行列 A に対して以下が成立します.

(1)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma) \ \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

(2) 直交行列 $P \in O(3)$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

が成立します.

定理2の証明(1)

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - \cdots \in \mathbf{R}[\lambda]$$

であることから，ある $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\Phi_A(\alpha) = 0$$

が成立します（中間値の定理）．この α に対して

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p}, \ \|\vec{p}\| = 1$$

を満たす $\vec{p} \in \mathbf{R}^3$ が存在します．次に GS の直交化を用いて $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底

$$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$$

が構成できます．これを用いて直交行列 $P = (\vec{p} \ \vec{q} \ \vec{r})$ を定義します．

定理 2 の証明 (2)

$$A\vec{p} = \alpha\vec{p},\ A\vec{q} = *_1\vec{p} + *_2\vec{q} + *_3\vec{r},\ A\vec{r} = \#_1\vec{p} + \#_2\vec{q} + \#_3\vec{r}$$

をまとめて

$$AP = (A\vec{p}\ A\vec{q}\ A\vec{r}) = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})\begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & *_2 & \#_2 \\ 0 & *_3 & \#_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & *_2 & \#_2 \\ 0 & *_3 & \#_3 \end{pmatrix}$$

となりますが, $B := \begin{pmatrix} *_2 & \#_2 \\ *_3 & \#_3 \end{pmatrix}$ と定義すると

$$^tPAP = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & *_1\ \#_1 \\ \hline 0 & \\ 0 & B \end{array}\right) \tag{1}$$

となります.

定理 2 の証明 (3)

(1) の左辺を

$$ {}^t\left({}^tPAP\right) = {}^tP\,{}^tA\,{}^t({}^tP) = {}^tPAP $$

と転置すると ${}^tPAP$ が対称であることが分かります．(1) の右辺を転置すると

$$ {}^t\left(\begin{array}{c|c} \alpha & *_1 \ \#_1 \\ \hline 0 & \\ 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \ 0 \\ \hline *_1 & \\ \#_1 & {}^tB \end{array}\right) $$

となりますから

$$ *_1 = \#_1 = 0, \quad {}^tB = B $$

であることが従います．

定理 2 の証明 (4)

B は対称であることが分かりましたから，ある回転行列 R_0 に対して

$$ {}^tR_0AR_0 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} $$

となります．このとき $R := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R_0 \end{array}\right) \in O(3)$ となります．さらに

$$
\begin{aligned}
&{}^tR\,{}^tPAPR \\
&= {}^tR \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & B \end{array}\right) R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & {}^tR_0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & R_0 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & {}^tR_0BR_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

定理 2 の証明 (5)

以上で

$$
{}^t(PR)A(PR) = \left(\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & 0 \\ \hline 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{array}\right)
$$

において $PR \in O(3)$ となります．最後に $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$ であることに注意しましょう．このとき

$$
\Phi_A(\lambda) = \Phi_{(PR)^{-1}A(PR)}(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)
$$

から A の固有方程式の 3 根とも実数であることも示されました．