行列の掛け算＋行列の転置

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2011 年 05 月 09 日 fmath20110509
2019 年 6 月 4 日 emath20190604
2020 年 6 月 5 日 slin2020L01_0605

行列 $\times$ 列ベクトル

$A = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n)$ が m 行 n 列, $\vec{x} \in \mathbf{K}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
A\vec{x} &= x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_j\vec{a}_j + \ldots + x_n\vec{a}_n \\
&= \begin{pmatrix} \vdots \\ x_1 a_{i1} + \ldots + x_j a_{ij} + \ldots + x_n a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i\vec{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\vec{x} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

行列 × 行列

$X = (\vec{x}_1 \ \ldots \ \vec{x}_k \ \ldots \ \vec{x}_\ell)$ が n 行 ℓ 列とします.
注 $A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_k, \ldots, A\vec{x}_\ell \in \mathbf{K}^m$ が定義される.

$$\begin{aligned} AX &= A(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k \ \cdots \ \vec{x}_\ell) \\ &= (A\vec{x}_1 \ \cdots \ A\vec{x}_k \ \cdots \ A\vec{x}_\ell) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_1\vec{x}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_i\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_i\vec{x}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_m\vec{x}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{x}_k & \cdots & \mathbf{a}_m\vec{x}_\ell \end{pmatrix} \end{aligned}$$

行列 × 行列 (2)

特に $m = 1$, すなわち $A = \mathbf{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ のとき

$$\mathbf{a}X = (\mathbf{a}\vec{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_\ell)$$

これを用いると

$$AX = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m X \end{pmatrix}$$

行列 × 行列 (3)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}X &= (\mathbf{a}\vec{x}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_k \ \cdots \ \mathbf{a}\vec{x}_\ell) \\
&= (\cdots \ a_1 x_{1k} + a_2 x_{2k} + \cdots + a_n x_{nk} \ \cdots) \\
&= \begin{array}{cl} & a_1(\cdots \ x_{1k} \ \cdots) \\ + & a_2(\cdots \ x_{2k} \ \cdots) \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ + & a_n(\cdots \ x_{nk} \ \cdots) \end{array} \\
&= a_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + a_n \mathbf{x}_n
\end{aligned}
$$

行列 × 行列 (4)

まとめ

$$
\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_j \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}
= a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_j\mathbf{x}_j + \cdots + a_n\mathbf{x}_n
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} X
= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i X \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m X \end{pmatrix}
$$

列ベクトルと行ベクトルの転置

- 列ベクトルの転置

$$ {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} $$

- 行ベクトルの転置

$$ {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} $$

列ベクトルと行ベクトルの転置

- 列ベクトルの転置の性質

$$ {}^t(\vec{x}+\vec{y}) = {}^t\vec{x} + {}^t\vec{y}, \quad {}^t(\lambda\vec{x}) = \lambda\,{}^t\vec{x} $$

これを使うと $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$ {}^t(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n) = x_1\,{}^t\vec{a}_1 + \cdots + x_n\,{}^t\vec{a}_n $$

- 行ベクトルの転置の性質

$$ {}^t(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = {}^t\mathrm{x} + {}^t\mathrm{y}, \quad {}^t(\lambda\mathrm{x}) = \lambda\,{}^t\mathrm{x} $$

行列の転置

- $m \times n$ 行列

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \cdots\ \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

- A の転置 ${}^t A$ は $n \times m$ 行列

$${}^t A = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ {}^t\vec{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 & \cdots & {}^t\mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

行列の積 (Quick View)

- $m \times n$ 行列 $A = (\vec{a}_1 \quad \cdots \quad \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$

  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y} = (y_1 \ \cdots \ y_m) \in (\mathbf{R}^m)^*$
- $A\vec{x} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$
- $\mathbf{y}A = y_1\mathbf{a}_1 + \cdots + y_m\mathbf{a}_m$

行列の積の転置（準備）

- $m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$

$$^t(A\vec{x}) = {}^t\vec{x} \cdot {}^tA$$

-

$$\begin{aligned} ^t(A\vec{x}) &= {}^t(x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n) \\ &= x_1 {}^t\vec{a}_1 + \cdots + x_n {}^t\vec{a}_n \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{a}_n \end{pmatrix} = {}^t\vec{x} \cdot {}^tA \end{aligned}$$

行列の転置の基本性質

- A は $m \times n$ 行列、$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_\ell \end{pmatrix}$ は $n \times \ell$ 行列とすると

$$ {}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA, \quad {}^t\left({}^tA\right) = A $$

- 証明

$$ AB = \left(A\vec{b}_1 \cdots A\vec{b}_\ell \right) $$

$$ {}^t(AB) = \begin{pmatrix} {}^t(A\vec{b}_1) \\ \vdots \\ {}^t(A\vec{b}_\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 {}^tA \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_\ell {}^tA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{b}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_\ell \end{pmatrix} {}^tA = {}^tB {}^tA $$

内積との関係（本当はこれが基本）

- A は $m \times n$ 行列、$\vec{x} \in \mathrm{R}^n$、$\vec{y} \in \mathrm{R}^m$

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = \left(\vec{x}, {}^tA\vec{y}\right)$$

- （復習）$\vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{R}^m$ に対して

$$(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a} \cdot \vec{b}$$

- 公式の証明

$$\begin{aligned} (A\vec{x}, \vec{y}) &= {}^t(A\vec{x})\,\vec{y} \\ &= {}^t\vec{x} \cdot {}^tA \cdot \vec{y} = (\vec{x}, {}^tA \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$