3 次正方行列の三角化と CH の定理

Nobuyuki TOSE

V002 Jan 27, 2020
V003 Oct 23 2020 SLIN2020 L12

正方行列の三角化

定理 3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{K}$$

が成立するならば，正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{1}$$

が成立します．

証明 (1)

ある $\vec{q}_1 \in \mathbf{K}^3$ が

$$A\vec{q}_1 = \alpha\vec{q}_1, \quad \vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

を満たします．さらに $\vec{q}_2, \vec{q}_3 \in \mathbf{K}^3$ を $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3$ が $\mathbf{K}^3$ の基底となるように選ぶことができます．このとき

$$Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$$

は正則行列となって

$$AQ = Q\begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & *_2 & \#_2 \\ 0 & *_3 & \#_3 \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & *_2 & \#_2 \\ 0 & *_3 & \#_3 \end{pmatrix}$$

となります．

証明 (2)

ここで $B = \begin{pmatrix} *_2 & \#_2 \\ *_3 & \#_3 \end{pmatrix}$ とします．このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)\Phi_B(\lambda)$$

から

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

となります．同様に考えると正則な $R_0 \in M_2(\mathbf{K})$ が存在して

$$R_0^{-1} B R_0 = \begin{pmatrix} \beta & * \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

とできます．ここで $R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_0 \end{pmatrix}$ と定めると R は正則となります．

証明 (3)

$$A_1 R = \begin{pmatrix} \alpha & *_1 & \#_1 \\ 0 & & \\ 0 & & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha & *_1' & \#_1' \\ 0 & & \\ 0 & & BR_0 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} A_1 R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & *_1' & \#_1' \\ 0 & & \\ 0 & & BR_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha & *_1' & \#_1' \\ 0 & & \\ 0 & & R_0^{-1} BR_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha & *_1' & \#_1' \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

CH の定理

定理　前の定理の状況で

$$\Phi_A(A) = O_3$$

が成立します.

CH の定理—証明 (1)

一般に $f \in \mathbf{K}[\lambda]$, $A \in M_3(\mathbf{K})$ と正則な $P \in M_3(\mathbf{K})$ に対して

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

が成立しますから前定理の (1) の状況で

$$\Phi_A(P^{-1}AP) = O_3$$

を示せば十分です.

CH の定理—証明 (2)

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

のとき

$$\begin{aligned}\Phi_A(P^{-1}AP) &= \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \beta-\alpha & * \\ 0 & 0 & \gamma-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-\beta & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \gamma-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha-\gamma & * & * \\ 0 & \beta-\gamma & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3\end{aligned}$$

となります.