n 次正方行列の三角化

Nobuyuki TOSE

Dec 25, 2020 V002

正方行列の三角化

定理 n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbf{K}\ (j = 1, \ldots, n)$$

が成立するならば，正則な $P \in M_n(\mathbf{K})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \cdots * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \cdots * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

が成立します.

証明 (1)

ある $\vec{q}_1 \in \mathbf{K}^n$ が

$$A\vec{q}_1 = \alpha_1 \vec{q}_1, \quad \vec{q}_1 \neq \vec{0}$$

を満たします．さらに $\vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_{n \in} \mathbf{K}^n$ を $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_n$ が $\mathbf{K}^n$ の基底となるように選ぶことができます（**基底の延長**）．このとき

$$Q = (\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_3)$$

は正則行列となって

$$AQ = Q \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{従って} \quad A_1 := Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

となります．

証明 (2)

このとき

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\Phi_B(\lambda)$$

から

$$\Phi_B(\lambda) = (\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_n)$$

となります．帰納法の仮定を用いると正則な $R_0 \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ が存在して

$$R_0^{-1}BR_0 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & * & \cdots & * & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

とできます．ここで $R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_0 \end{pmatrix}$ と定めると R は正則となります．

証明 (3)

$$A_1R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & BR_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}A_1R = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & BR_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & R_0^{-1}BR_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ & \alpha_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

すなわち

$$(QR)^{-1}A(QR) = R^{-1}Q^{-1}AQR = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ & \alpha_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となりますが，$P := QR \in M_n(\mathbf{K})$ は正則行列です．

注意

注意 $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ のとき $\|\vec{q}_1\| = 1$ として

$$\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$$

を $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底となるように正規直交基底の延長を行うと $P \in U(n)$ とできます.

注意 $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ のとき $\|\vec{q}_1\| = 1$ として

$$\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$$

を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底となるように正規直交基底の延長を行うと $P \in O(n)$ とできます.