2 平面の交わり・ベクトル積

Nobuyuki TOSE

April 23, 2019

2枚の平面が定める直線

座標空間の点 (x, y, z) が方程式

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & \cdots (1) \\ 2x + y - z = -1 & \cdots (2) \end{cases}$$

を満たすとき x, y を z で表しましょう.

$$\begin{cases} x - y = 1 - z & (1)' \\ 2x + y = z - 1 & (2)' \end{cases}$$

と x と y の連立1次方程式とみなします. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ であるので, これをクラメールの公式で解きます.

2 枚の平面が定める直線 (2)

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1+z & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\{(1-z)\cdot 1-(-1+z)(-1)\} = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0 \\
y &= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1+z \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\{1\cdot(-1+z)-2\cdot(1-z)\} = \frac{1}{3}(3z-3) = z-1
\end{aligned}
$$

2 枚の平面が定める直線 (3)

ベクトル表示をすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z-1 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので $(0, -1, 0)$ を通り $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が方向ベクトルである直線であることが分かる．これは (1) が定める平面と (2) が定める平面の交わりがなす直線であることが分かる．

平面の方程式

点 $(0,-1,0)$ は

$$x \quad - \quad y \quad + \quad z \quad = \quad 1 \quad \cdots (1)$$

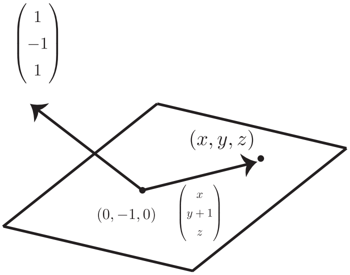
を満たす．これから

$$\begin{array}{rcccccccl} & x & - & y & + & z & = & 1 & \cdots (1) \\ -) & 0 & - & (-1) & + & 0 & = & 1 & \\ \hline & x & - & (y+1) & + & z & = & 0 & \cdots (1)' \end{array}$$

となります．(1)' は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

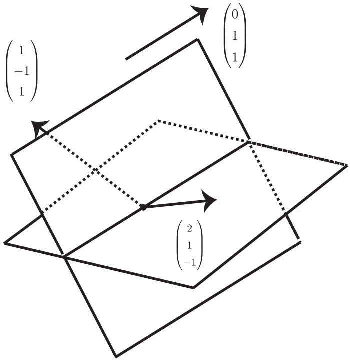
平面の方程式 (2)



(1) は法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で $(0, -1, 0)$ を通る平面であることが分かります.

ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は平面 (1) と平行であり，平面 (2) とも平行である．これから

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



2 平面の交わり (2)

2 平面の交わり

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) と (2) の法線ベクトルについて

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するとします．さらに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定します．

2 平面の交わり (3)

クラメールの公式を用いて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2 z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2 z + \alpha_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

が従います．さらに $t = \frac{z}{D}$ とパラメータを定めると，上の結果をベクトルで表すことによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と 2 直線の交わりは直線としてパラメータ表示される．

2 平面の交わり (4)—ベクトル積

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の外積（ベクトル積）と呼びます．このとき

$$\vec{p}_1 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \quad \vec{p}_2 \perp \vec{p}_1 \times \vec{p}_2$$