

第 6 章演習解答

演習 6.1 $\vec{v} = {}^t(v_1 \cdots v_i \cdots v_n) \neq \vec{0}$ であるならば, ある i について第 i 成分がゼロでない, すなわち $v_i \neq 0$ が成立する. このとき

$$x\vec{v} = {}^t(xv_1 \cdots xv_i \cdots xv_n) = \vec{0}$$

から $xv_i = 0$, さらに $v_i \neq 0$ から $x = 0$ が従う.

別解 $\vec{v} \neq \vec{0}$ から $\|\vec{v}\| > 0$ が成立する. このとき

$$\|x\vec{v}\| = |x| \cdot \|\vec{v}\| = 0$$

から $|x| = 0$ 従って $x = 0$ を得る. 演習 6.2(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 2$ であることが分かる. 次に固有ベクトルを求めよう.

(i) $\lambda = -5$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

となるので, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となる.

(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる。

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成立する。一般論(定理**)から P が正則であることが分かっているので、この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

演習 6.2(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -2, -1$ であることが分かる。次に固有ベクトルを求めよう。

(i) $\lambda = -2$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

となるので、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる。

(ii) $\lambda = -1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + 2y = 0$$

となるので、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる。

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成立する。一般論(定理**)から P が正則であることが分かっているので、この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

演習 6.2(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1) - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる。次に固有ベクトルを求めよう。

(i) $\lambda = -5$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

となるので、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる。

(ii) $\lambda = 7$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる.

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-5\vec{p}_1 \ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

が成立する. 一般論 (定理**) から P が正則であることが分かっているので, この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化できる.

演習 6.3(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので, A の固有値は $\lambda = -5, 2$ である. そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A - 10I_2 = O_2$$

が成立する. この式を

$$A(A + 5I_2) = 2(A + 5I_2), \quad A(A - 2I_2) = -5(A - 2I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 5I_2) = 2^n(A + 5I_2) \tag{9.16}$$

$$A(A - 2I_2) = (-5)^n(A - 2I_2) \tag{9.17}$$

が従う. ここで (9.16)–(9.17) を考えると

$$7A^n = 2^n(A + 5I_2) - (-5)^n(A - 2I_2)$$

から

$$A^n = \frac{2^n}{7}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{7}(A - 2I_2)$$

を得る.

演習 6.3(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

となるので, A の固有値は $\lambda = -2, -1$ である. そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A + 2I_2 = O_2$$

が成立する. この式を

$$A(A + 2I_2) = -(A + 2I_2), \quad A(A + I_2) = -2(A + I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 2I_2) = (-1)^n(A + 2I_2) \tag{9.18}$$

$$A^n(A + I_2) = (-2)^n(A + I_2) \tag{9.19}$$

が従う. ここで (9.18)–(9.19) を考えると

$$A^n = (-1)^n(A + 2I_2) - (-2)^n(A + I_2)$$

を得る.

演習 6.3(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので, A の固有値は $\lambda = -5, 7$ である. そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = O_2$$

が成立する. この式を

$$A(A + 5I_2) = 7(A + 5I_2), \quad A(A - 7I_2) = -5(A - 7I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 5I_2) = 7^n(A + 5I_2) \tag{9.20}$$

$$A^n(A - 7I_2) = (-5)^n(A - 7I_2) \quad (9.21)$$

が従う。ここで (9.20)–(9.21) を考えると

$$12A^n = 7^n(A + 5I_2) - (-5)^n(A - 7I_2)$$

から

$$A^n = \frac{7^n}{12}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{12}(A - 7I_2)$$

を得る。

演習 6.4(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda - 3) + 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5$ (重根) であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2$$

が従う。これを

$$A(A - 5I_2) = 5(A - 5I_2)$$

と変形して、両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - 5I_2) = 5^n(A - 5I_2)$$

を得る。さらにこの両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{1}{5^{n+1}}A^{n+1} - \frac{1}{5^n}A^n = \frac{1}{5}(A - 5I_2)$$

となるが、これを等差の式と考えると

$$\frac{1}{5^n}A^n = I_2 + \frac{n}{5}(A - 5I_2)$$

から

$$A^n = 5^n I_2 + n5^{n-1}(A - 5I_2)$$

が従う。

演習 6.4(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ -9 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う. これを

$$A(A - 2I_2) = 2(A - 2I_2)$$

と変形して, 両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - 2I_2) = 2^n(A - 2I_2)$$

を得る. さらにこの両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{1}{2^{n+1}}A^{n+1} - \frac{1}{2^n}A^n = \frac{1}{2}(A - 2I_2)$$

となるが, これを等差の式と考えると

$$\frac{1}{2^n}A^n = I_2 + \frac{n}{2}(A - 2I_2)$$

から

$$A^n = 2^n I_2 + n2^{n-1}(A - 2I_2)$$

が従う.

演習 6.4(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A + I_2 = (A - I_2)^2 = O_2$$

が従う. これを

$$A(A - I_2) = A - I_2$$

と変形して, 両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - I_2) = (A - I_2)$$

を得る. これを

$$A^{n+1} - A^n = A - I$$

と変形して，等差の式と考えると

$$A^n = I + n(A - I)$$

が従う．

演習 6.5(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5$ (重根) であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 5)^2 + a\lambda + b$$

と割り算したとして，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 5)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 5) + a$$

も用いる．この2つの式の両辺に $\lambda = 5$ を代入して

$$5a + b = 5^n, \quad a = n5^{n-1}$$

から

$$a = n5^{n-1}, \quad b = 5^n - n5^n = 5^n(1 - n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 5)^2 + n5^{n-1}\lambda + 5^n(1 - n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - 5I_2)^2 + n5^{n-1}A + 5^n(1 - n)I_2 = n5^{n-1}A + 5^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.5(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う. ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ で割り算することを考える.

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + a\lambda + b$$

と割り算したとして, 余りに出てきた a および b を求める. そのために, この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 2)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 2) + a$$

も用いる. この 2 つの式の両辺に $\lambda = 2$ を代入して

$$2a + b = 2^n, \quad a = n2^{n-1}$$

から

$$a = n2^{n-1}, \quad b = 2^n - n2^n = 2^n(1 - n)$$

を得る. 以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + n2^{n-1}\lambda + 2^n(1 - n)$$

が従う. これから

$$A^n = q(A)(A - 2I_2)^2 + n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2 = n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる.

演習 6.5(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う. ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ で割り算することを考える.

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 1)^2 + a\lambda + b$$

と割り算して、余りに出てきた a および b を求める。そのために、この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda-1)^2 + 2q(\lambda)(\lambda-1) + a$$

も用いる。この2つの式の両辺に $\lambda = 1$ を代入して

$$a + b = 1, \quad a = n$$

から

$$a = n, \quad b = 1 - n$$

を得る。以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-1)^2 + n\lambda + (1-n)$$

が従う。これから

$$A^n = q(A)(A - I_2)^2 + nA + (1-n)I_2 = nA + (1-n)A$$

となることが分かる。

演習 6.5(4) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$ (重根) であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う。ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ で割り算することを考える。

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + a\lambda + b$$

と割り算して、余りに出てきた a および b を求める。そのために、この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 2)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 2) + a$$

も用いる。この2つの式の両辺に $\lambda = 2$ を代入して

$$2a + b = 2^n, \quad a = n2^{n-1}$$

から

$$a = n2^{n-1}, \quad b = 2^n - n2^{n-1} = 2^{n-1}(2 - n)$$

を得る。以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + n2^{n-1}\lambda + 2^n(1 - n)$$

が従う。これから

$$A^n = q(A)(A - 2I_2)^2 + n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2 = n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる。

演習 6.8 λ^n を

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

で割り算して

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) + a\lambda + b$$

を得たとする。この式に $\lambda = \alpha$, $\lambda = \beta$ を代入して

$$\alpha^n = a\alpha + b \tag{9.22}$$

$$\beta^n = a\beta + b \tag{9.23}$$

を得る。(9.22)–(9.23) から

$$a(\alpha - \beta) = \alpha^n - \beta^n$$

さらに

$$a = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

が従う。これから

$$\begin{aligned} b &= \alpha^n - a\alpha \\ &= \alpha^n - \alpha \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

も得る。以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\lambda + \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}$$

となるが, Cayley-Hamilton の定理から

$$(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = O_2$$

が成立することが分かるので

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)O_2 + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A + \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}I_2 \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A + \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}I_2 \end{aligned}$$

演習 6.7(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 2$ であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A - 10I_2 = (A + 5I_2)(A - 2I_2) = O_2$$

が従う. ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$ で割り算することを考える.

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 5)(\lambda - 2) + a\lambda + b \quad (9.24)$$

と割り算して, 余りに出てきた a および b を求める. すなわち (9.24) に $\lambda = -5$ と $\lambda = 2$ を代入して

$$(-5)^n = -5a + b \quad (9.25)$$

$$2^n = 2a + b \quad (9.26)$$

を得て, さらに (9.25)–(9.26) から

$$-7a = (-5)^n - 2^n \quad \text{従って} \quad a = \frac{2^n - (-5)^n}{7}$$

そして

$$b = 2^n - \frac{2(2^n - (-5)^n)}{7} = \frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot (-5)^n}{7}$$

を得る. 以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 5)(\lambda - 2) + \frac{2^n - (-5)^n}{7}\lambda + \frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot (-5)^n}{7}$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A + 5I_2)(A - 2I_2) + \frac{2^n - (-5)^n}{7}A + \frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot (-5)^n}{7}I_2 \\ &= \frac{2^n - (-5)^n}{7}A + \frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot (-5)^n}{7}I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.7(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -1, -2$ であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A + 2I_2 = (A + I_2)(A + 2I_2) = O_2$$

が従う。ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ で割り算することを考える。

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 1)(\lambda + 2) + a\lambda + b \quad (9.27)$$

と割り算して、余りに出てきた a および b を求める。すなわち (9.27) に $\lambda = -1$ と $\lambda = -2$ を代入して

$$(-1)^n = -a + b \quad (9.28)$$

$$(-2)^n = -2a + b \quad (9.29)$$

を得て、さらに (9.28)–(9.29) から

$$a = (-1)^n - (-2)^n$$

そして

$$b = (-1)^n + (-1)^n - (-2)^n = 2(-1)^n - (-2)^n$$

を得る。以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 1)(\lambda + 2) + ((-1)^n - (-2)^n)\lambda + 2(-1)^n - (-2)^n$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A + I_2)(A + 2I_2) + ((-1)^n - (-2)^n)A + 2(-1)^n - (-2)^n I_2 \\ &= ((-1)^n - (-2)^n)A + 2(-1)^n - (-2)^n I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.7(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda + 5)(\lambda - 7)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = (A + 5I_2)(A - 7I_2) = O_2$$

が従う。ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda - 7)$ で割り算することを考える。

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 5)(\lambda - 7) + a\lambda + b \quad (9.30)$$

と割り算して、余りに出てきた a および b を求める。すなわち (9.30) に $\lambda = 7$ と $\lambda = -5$ を代入して

$$7^n = 7a + b \quad (9.31)$$

$$(-5)^n = -5a + b \quad (9.32)$$

を得て、さらに (9.31) - (9.32) から

$$12a = 7^n - (-5)^n \quad \text{従って} \quad a = \frac{7^n - (-5)^n}{12}$$

そして

$$b = 7^n - \frac{7^n - (-5)^n}{12} = \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}$$

を得る。以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 5)(\lambda - 7) + \frac{7^n - (-5)^n}{12}\lambda + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A + 5I_2)(A - 7I_2) + \frac{7^n - (-5)^n}{12}A + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}I_2 \\ &= \frac{7^n - (-5)^n}{12}A + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.8(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 5$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2 \quad (9.33)$$

が従う. ここで

$$A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - 5I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる. このとき

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から従う (9.33) すなわち

$$(A - 5I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - 5I_2)\vec{p}_2 = (A - 5I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る. 以上から

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ 5\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

を得る.

演習 6.8(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2 \quad (9.34)$$

が従う. ここで

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - 2I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる. このとき

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から従う (9.34) すなわち

$$(A - 2I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - 2I_2)\vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る. 以上から

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ 2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る.

演習 6.8(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$ (重根) であることが分かる. また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A + I_2 = (A - I_2)^2 = O_2 \quad (9.35)$$

が従う。ここで

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる。このとき

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理からしたがう (9.35)

$$(A - I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - I_2)\vec{p}_2 = (A - I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る。以上から

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ \vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。