第 6 章演習解答

演習 6.1 $\vec{v} = {}^t(v_1 \cdots v_i \cdots v_n) \neq \vec{0}$ であるならば，ある i について第 i 成分がゼロでない，すなわち $v_i \neq 0$ が成立する．このとき

$$x\vec{v} = {}^t(xv_1 \cdots xv_i \cdots xv_n) = \vec{0}$$

から $xv_i = 0$, さらに $vi \neq 0$ から $x = 0$ が従う．
別解　$\vec{v} \neq \vec{0}$ から $||\vec{v}|| > 0$ が成立する．このとき

$$||x\vec{v}|| = |x| \cdot ||\vec{v}|| = 0$$

から $|x| = 0$ 従って $x = 0$ を得る．**演習 6.2(1)** A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 4) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 2$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．
(i) $\lambda = -5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となる．
(ii) $\lambda = 2$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

演習 6.2(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -2, -1$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(i) $\lambda = -2$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

(ii) $\lambda = -1$ のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p_1}\ A\vec{p_2}) = (-2\vec{p_1}\ \ -\vec{p_2}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

演習 6.2(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 1) - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる．次に固有ベクトルを求めよう．

(i) $\lambda = -5$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

(ii) $\lambda = 7$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

となるので，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となる．

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と具体的に固有ベクトルを選ぶと

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-5\vec{p}_1\ 7\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

が成立する．一般論（定理＊＊）から P が正則であることが分かっているので，この式の両辺に右から P^{-1} を掛けると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

演習 6.3(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda+5)(\lambda-2)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -5, 2$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A - 10I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A+5I_2) = 2(A+5I_2), \quad A(A-2I_2) = -5(A-2I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A+5I_2) = 2^n(A+5I_2) \tag{9.16}$$

$$A(A-2I_2) = (-5)^n(A-2I_2) \tag{9.17}$$

が従う．ここで (9.16)−(9.17) を考えると

$$7A^n = 2^n(A+5I_2) - (-5)^n(A-2I_2)$$

から

$$A^n = \frac{2^n}{7}(A + 5I_2) - \frac{(-5)^n}{7}(A - 2I_2)$$

を得る．

演習 6.3(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -2, -1$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 + 3A + 2I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 2I_2) = -(A + 2I_2), \quad A(A + I_2) = -2(A + I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 2I_2) = (-1)^n(A + 2I_2) \tag{9.18}$$

$$A^n(A + I_2) = (-2)^n(A + I_2) \tag{9.19}$$

が従う．ここで (9.18)−(9.19) を考えると

$$A^n = (-1)^n(A + 2I_2) - (-2)^n(A + I_2)$$

を得る．

演習 6.3(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda - 7)(\lambda + 5)$$

となるので，A の固有値は $\lambda = -5, 7$ である．そして Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = O_2$$

が成立する．この式を

$$A(A + 5I_2) = 7(A + 5I_2), \quad A(A - 7I_2) = -5(A - 7I_2)$$

と 2 通りに変形すると

$$A^n(A + 5I_2) = 7^n(A + 5I_2) \tag{9.20}$$

$$A^n(A-7I_2)=(-5)^n(A-7I_2) \tag{9.21}$$

が従う．ここで (9.20)−(9.21) を考えると

$$12A^n=7^n(A+5I_2)-(-5)^n(A-7I_2)$$

から

$$A^n=\frac{7^n}{12}(A+5I_2)-\frac{(-5)^n}{12}(A-7I_2)$$

を得る．

演習 6.4(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-7 & -4\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda-3)+4=\lambda^2-10\lambda+25=(\lambda-5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda=-5$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2-10A+25I_2=(A-5I_2)^2=O_2$$

が従う．これを

$$A(A-5I_2)=5(A-5I_2)$$

と変形して，両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A-5I_2)=5^n(A-5I_2)$$

を得る．さらにこの両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{1}{5^{n+1}}A^{n+1}-\frac{1}{5^n}A^n=\frac{1}{5}(A-5I_2)$$

となるが，これを等差の式と考えると

$$\frac{1}{5^n}A^n=I_2+\frac{n}{5}(A-5I_2)$$

から

$$A^n=5^nI_2+n5^{n-1}(A-5I_2)$$

が従う．

演習 6.4(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 1\\ -9 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)+9=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．これを

$$A(A - 2I_2) = 2(A - 2I_2)$$

と変形して，両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - 2I_2) = 2^n(A - 2I_2)$$

を得る．さらにこの両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{1}{2^{n+1}}A^{n+1} - \frac{1}{2^n}A^n = \frac{1}{2}(A - 2I_2)$$

となるが，これを等差の式と考えると

$$\frac{1}{2^n}A^n = I_2 + \frac{n}{2}(A - 2I_2)$$

から

$$A^n = 2^n I_2 + n2^{n-1}(A - 2I_2)$$

が従う．

演習 6.4(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A + I_2 = (A - I_2)^2 = O_2$$

が従う．これを

$$A(A - I_2) = A - I_2$$

と変形して，両辺に次々と A を掛けていくと

$$A^n(A - I_2) = (A - I_2)$$

を得る。これを

$$A^{n+1} - A^n = A - I$$

と変形して，等差の式と考えると

$$A^n = I + n(A - I)$$

が従う．

演習 6.5(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 5)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 5)^2 + a\lambda + b$$

と割り算したとして，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 5)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 5) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 5$ を代入して

$$5a + b = 5^n, \quad a = n5^{n-1}$$

から

$$a = n5^{n-1}, \quad b = 5^n - n5^n = 5^n(1 - n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 5)^2 + n5^{n-1}\lambda + 5^n(1 - n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - 5I_2)^2 + n5^{n-1}A + 5^n(1 - n)I_2 = n5^{n-1}A + 5^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.5(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + a\lambda + b$$

と割り算したとして，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda - 2)^2 + 2q(\lambda)(\lambda - 2) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 2$ を代入して

$$2a + b = 2^n, \quad a = n2^{n-1}$$

から

$$a = n2^{n-1}, \quad b = 2^n - n2^n = 2^n(1 - n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 2)^2 + n2^{n-1}\lambda + 2^n(1 - n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - 2I_2)^2 + n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2 = n2^{n-1}A + 2^n(1 - n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.5(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda - 1)^2 + a\lambda + b$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda-1)^2 + 2q(\lambda)(\lambda-1) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 1$ を代入して

$$a + b = 1, \quad a = n$$

から

$$a = n,\ b = 1 - n$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-1)^2 + n\lambda + (1-n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A - I_2)^2 + nA + (1-n)I_2 = nA + (1-n)A$$

となることが分かる．

演習 6.5(4) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 2$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-2)^2 + a\lambda + b$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．そのために，この式の両辺を λ で微分した

$$n\lambda^{n-1} = q'(\lambda)(\lambda-2)^2 + 2q(\lambda)(\lambda-2) + a$$

も用いる．この 2 つの式の両辺に $\lambda = 2$ を代入して

$$2a + b = 2^n, \quad a = n2^{n-1}$$

から

$$a = n2^{n-1}, \quad b = 2^n - n2^n = 2^n(1-n)$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-2)^2 + n2^{n-1}\lambda + 2^n(1-n)$$

が従う．これから

$$A^n = q(A)(A-2I_2)^2 + n2^{n-1}A + 2^n(1-n)I_2 = n2^{n-1}A + 2^n(1-n)I_2$$

となることが分かる．

演習 6.8 λ^n を

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

で割り算して

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) + a\lambda + b$$

を得たとする．この式に $\lambda=\alpha$, $\lambda=\beta$ を代入して

$$\alpha^n = a\alpha + b \tag{9.22}$$

$$\beta^n = a\beta + b \tag{9.23}$$

を得る．(9.22)–(9.23) から

$$a(\alpha-\beta) = \alpha^n - \beta^n$$

さらに

$$a = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

が従う．これから

$$\begin{aligned} b &= \alpha^n - a\alpha \\ &= \alpha^n - \alpha\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

も得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\lambda + \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}$$

となるが，Cayley-Hamilton の定理から

$$(A-\alpha I_2)(A-\beta I_2)=O_2$$

が成立することが分かるので

$$\begin{aligned}A^n &= q(A)O_2 + + \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A + \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}I_2 \\ &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A + \frac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}I_2\end{aligned}$$

演習 6.7(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)-6=\lambda^2+3\lambda-10=(\lambda+5)(\lambda-2)$$

となるので A の固有値は $\lambda=-5,2$ であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2+3A-10I_2=(A+5I_2)(A-2I_2)=O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda)=(\lambda+5)(\lambda-2)$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n=q(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-2)+a\lambda+b \tag{9.24}$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．すなわち (9.24) に $\lambda=-5$ と $\lambda=2$ を代入して

$$(-5)^n=-5a+b \tag{9.25}$$

$$2^n=2a+b \tag{9.26}$$

を得て，さらに (9.25)−(9.26) から

$$-7a=(-5)^n-2^n \quad 従って \quad a=\frac{2^n-(-5)^n}{7}$$

そして

$$b=2^n-\frac{2(2^n-(-5)^n)}{7}=\frac{5\cdot 2^n+2\cdot(-5)^n}{7}$$

を得る．以上から

$$\lambda^n=q(\lambda)(\lambda+5)(\lambda-2)+\frac{2^n-(-5)^n}{7}\lambda+\frac{5\cdot 2^n+2\cdot(-5)^n}{7}$$

さらに

$$
\begin{aligned}
A^n &= q(A)(A+5I_2)(A-2I_2) + \frac{2^n-(-5)^n}{7}A + \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot(-5)^n}{7}I_2 \\
&= \frac{2^n-(-5)^n}{7}A + \frac{5\cdot 2^n + 2\cdot(-5)^n}{7}I_2
\end{aligned}
$$

を得る。

演習 6.7(2) A の固有多項式は

$$
\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 2 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-1)+6 = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)
$$

となるので A の固有値は $\lambda=-1,-2$ であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$
A^2+3A+2I_2 = (A+I_2)(A+2I_2) = O_2
$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)$ で割り算することを考える．

$$
\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) + a\lambda + b \tag{9.27}
$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．すなわち (9.27) に $\lambda=-1$ と $\lambda=-2$ を代入して

$$
(-1)^n = -a+b \tag{9.28}
$$

$$
(-2)^n = -2a+b \tag{9.29}
$$

を得て，さらに (9.28)−(9.29) から

$$
a = (-1)^n - (-2)^n
$$

そして

$$
b = (-1)^n + (-1)^n - (-2)^n = 2(-1)^n - (-2)^n
$$

を得る．以上から

$$
\lambda^n = q(\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2) + ((-1)^n-(-2)^n)\lambda + 2(-1)^n - (-2)^n
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
A^n &= q(A)(A+I_2)(A+2I_2) + ((-1)^n-(-2)^n)A + 2(-1)^n - (-2)^n I_2 \\
&= ((-1)^n-(-2)^n)A + 2(-1)^n - (-2)^n I_2
\end{aligned}
$$

を得る。

演習 6.7(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35 = (\lambda + 5)(\lambda - 7)$$

となるので A の固有値は $\lambda = -5, 7$ であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A - 35I_2 = (A + 5I_2)(A - 7I_2) = O_2$$

が従う．ここで λ^n を $\Phi_A(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda - 7)$ で割り算することを考える．

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 5)(\lambda - 7) + a\lambda + b \tag{9.30}$$

と割り算して，余りに出てきた a および b を求める．すなわち (9.30) に $\lambda = 7$ と $\lambda = -5$ を代入して

$$7^n = 7a + b \tag{9.31}$$

$$(-5)^n = -5a + b \tag{9.32}$$

を得て，さらに (9.31)–(9.32) から

$$12a = 7^n - (-5)^n \quad 従って \quad a = \frac{7^n - (-5)^n}{12}$$

そして

$$b = 7^n - \frac{7^n - (-5)^n}{12} = \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}$$

を得る．以上から

$$\lambda^n = q(\lambda)(\lambda + 5)(\lambda - 7) + \frac{7^n - (-5)^n}{12}\lambda + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}$$

さらに

$$\begin{aligned} A^n &= q(A)(A + 5I_2)(A - 7I_2) + \frac{7^n - (-5)^n}{12}A + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}I_2 \\ &= \frac{7^n - (-5)^n}{12}A + \frac{5 \cdot 7^n + 7 \cdot (-5)^n}{12}I_2 \end{aligned}$$

を得る。

演習 6.8(1) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 5$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 10A + 25I_2 = (A - 5I_2)^2 = O_2 \tag{9.33}$$

が従う．ここで

$$A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - 5I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる．このとき

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から従う (9.33) すなわち

$$(A - 5I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - 5I_2)\vec{p}_2 = (A - 5I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る．以上から

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ 5\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

を得る．

演習 6.8(2) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 4A + 4I_2 = (A - 2I_2)^2 = O_2 \tag{9.34}$$

が従う．ここで

$$A - I_2 2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - 2I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる．このとき

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理から従う (9.34) すなわち

$$(A - 2I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - 2I_2)\vec{p}_2 = (A - 2I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る．以上から

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ 2\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る．

演習 6.8(3) A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

となるので A の固有値は $\lambda = 1$（重根）であることが分かる．また Cayley-Hamilton の定理から

$$A^2 - 2A + I_2 = (A - I_2)^2 = O_2 \tag{9.35}$$

が従う．ここで

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選ぶと

$$\vec{p}_2 := (A - I_2)\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる．このとき

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と定めると一般論から P は正則であることが分かる。また Cayley-Hamilton の定理からしたがう (9.35)

$$(A - I_2)^2 = O_2$$

から

$$(A - I_2)\vec{p}_2 = (A - I_2)^2\vec{p}_1 = O_2\vec{p}_1 = \vec{0}$$

を得る．以上から

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2\ \vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

から

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．