

**演習 7.9** 次の 2 次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう。

$$(1) 2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3} - 4)x + (\sqrt{3} - 4)y + (4 - \sqrt{3}) = 0$$

$$(2) x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$(3) 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0$$

$$(4) x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$$

$$(5) x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$$

$$(6) x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0$$

**解答 (1)**

$$2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3} - 4)x + (\sqrt{3} - 4)y + (4 - \sqrt{3}) = 0 \quad (1)$$

は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 4 \\ \sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 4 - \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

と表されます。平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって (2) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

となりますから、ここで

$$2A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\vec{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 4 \\ \sqrt{3} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{2} \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 4 \\ \sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2\sqrt{3} - 6 \end{aligned}$$

と計算されますから (2) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2\sqrt{3} - 6 = 0 \quad (3)$$

となります。

次に  $A$  を回転行列で対角化します。 $A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{5}{2})$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$  であることが分かります。さらに固有ベクトルを求めます。

$\lambda = \frac{1}{2}$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{3} \cdot x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります。

$\lambda = \frac{5}{2}$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - \sqrt{3} \cdot y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cdot y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります。

ここで回転行列

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = \left( \frac{1}{2}\vec{r}_1 \ \frac{5}{2}\vec{r}_2 \right) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます。さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 \end{aligned}$$

となりますから、この座標で (1) は

$$\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 = 6 - 2\sqrt{3}$$

と表され、楕円であることが分かります。

(2)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0 \quad (1)$$

は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 4 - \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

と表されます。  $|A| = 0$  ですから、 $A$  を回転行列で対角化することから始めます。

$A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = 0, 5$  であることが分かります。さらに固有ベクトルを求めます。

$\lambda = 0$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

$\lambda = 5$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (0 \cdot \vec{r}_1 \ 5 \cdot \vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 5\eta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left( \vec{b}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( {}^t R \vec{b}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

となりますから、この座標で (1) は

$$5\eta^2 + \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi = 0 \quad (3)$$

となります。さらにこれを

$$\xi = \frac{\sqrt{5}}{2} \left( \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

と変形します。最後に

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換によって (1) は

$$X = \frac{\sqrt{5}}{2} Y^2$$

と表されます。

別解 (1) は

$$(x - 2y)^2 - 8x + 6y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left( \frac{x - 2y}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 0$$

と変形できます。回転座標変換を

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \\ \frac{-x+2y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と定めると (1) は

$$\eta^2 - \frac{8}{5} \cdot \frac{2\xi - \eta}{\sqrt{5}} + \frac{6}{5} \cdot \frac{\xi + 2\eta}{\sqrt{5}} = \eta^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta = 0$$

と表されます。

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{とすれば}$$

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32 = 0 \quad (1)$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

よって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} & \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ & \quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 32 = 70 \end{aligned}$$

から

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 70 = 0$$

となります。

次に  $A$  を回転行列で対角化します..  $A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -2, 3$  であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda = -2$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

$\lambda = 3$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (-2\vec{r}_1 \ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -2\xi^2 + 3\eta^2 \end{aligned}$$

となりますから、この座標で (1) は

$$-2\xi^2 + 3\eta^2 + 70 = 0$$

と表され、双曲線であることが分かります。

(4)  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  とすれば

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (1)$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} &\left( A \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} &\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) = 0 \end{aligned}$$



となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

から (1) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{3} = 0$$

となります。

さらに  $A$ 、正確には 2 次形式  $\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$  を回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

で変換します。すなわち

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで

$${}^tRAR = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを用いました。以上から与えられた2次曲線は楕円

$$\frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{3} = 0$$

であることが分かりました。

$$(5) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ とすれば}$$

$$\left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) - 5 = 0 \quad (1)$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると (1) は

$$\begin{aligned} & \left( A \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) - 5 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) - 5 \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ & \quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) - 5 = 0 \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left( \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} & \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left( A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) \\ &= \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left( 2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left( \vec{b}, \vec{\alpha} \right) \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

から (1) は

$$\left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{2}{3} - 5 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{28}{3} = 0$$

となります。

次に  $A$  を回転行列で対角化します..  $A$  の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

から  $A$  の固有値は  $\lambda = -1, 3$  であることが分かります。さらに固有ベクトルを求めます。

$\lambda = -1$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります。

$\lambda = 3$  のとき

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

が固有ベクトルとなります。

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (-\vec{r}_1 \ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と  $A$  は回転行列  $R$  によって対角化されます。さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned} \left( A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left( AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( {}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -\xi^2 + 3\eta^2 \end{aligned}$$

となりますから、この座標で (1) は

$$-\xi^2 + 3\eta^2 - \frac{28}{3} = 0$$

と表され、双曲線であることが分かります。

(6)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0 \tag{1}$$

について問題 (2) の別解と同様に考えてみます。すなわち

$$\left( \frac{x-2y}{\sqrt{5}} \right)^2 - y - \frac{2}{5} = 0 \tag{2}$$

と変形すると、回転座標変換

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\xi^2 - \frac{-2\xi + \eta}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5} = 0$$

となります。これを

$$\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\eta}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta = \sqrt{5} \left(\xi + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

とさらに変形します。ここで

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \eta - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えると

$$Y = \sqrt{5}X^2$$

となります。