第 7 章演習解答

演習 7.1 (1) $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

演習 7.2 <u>(7.8) について</u>
$(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ は，$y = \vec{a}$ とすると

$$(\vec{a}, \vec{a}) = ||\vec{a}||^2 = 0$$

から $\vec{a} = \vec{0}$ が従うことから分かります．
<u>(7.9) について</u>$(\Rightarrow)$ は明らかです．$(\Leftarrow)$ は，$C = \vec{c}_1\ \vec{c}_2$ と列ベクトル表示をすると

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}_1 = \vec{0}$$

から $C = (\vec{0}\ \vec{0}) = O_2$ となることから分かります．

演習 7.3 <u>P_1P_2 について</u>

$$^t(P_1P_2)P_1P_2 = {}^tP_2{}^tP_1P_1P_2 = {}^tP_2I_2P_2 = {}^tP_2P_2 = I_2$$

$$P_1P_2{}^t(P_1P_2) = P_1P_2{}^tP_2{}^tP_1 = P_1I_2{}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2$$

から P_1P_2 は直交行列になります．
<u>${}^tP_1 = P_1^{-1}$ について</u>

$$^t({}^tP_1){}^tP_1 = P_1{}^tP_1 = I_2$$

$$^tP_1{}^t({}^tP_1) = {}^tP_1P_1 = I_2$$

から ${}^tP_1$ が直交であることが分かります．

演習 7.4

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2
\end{aligned}
$$

が成立しますから，正則行列の定義から Q は正則となり，$Q^{-1} = Q$ が従います.

演習 7.5 $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\vec{w} &= \left(x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\
&= x\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
\vec{q} &= \left(2\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} - I_2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 & 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} & \sin^2\frac{\alpha}{2} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\vec{v}
\end{aligned}
$$

となります．よって

$$
Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}
$$

であることが分かります.

演習 7.6 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう。
(2) 制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう.

解答 (1) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^2 - (-1)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。
(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。
(ii) $\lambda = 1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は対角化できます。

(2) A が定める 2 次形式を (1) で用いた回転座標変換を適用します。P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(P^{-1}AP \cdot P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= 3\xi^2 + \eta^2\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

となりますから，制約条件を用いて η を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3\xi^2 + (1 - \xi^2) = 1 + 2\xi^2 \geq 1$$

となりますから，制約条件の下で $z \geq 1$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\xi = 0$ 従って $\eta = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm\vec{p}_2$$

において z は最小値 1 を取ることが分かります.

他方，制約条件を用いて ξ を消去すると

$$z = 3\xi^2 + \eta^2 = 3(1 - \eta^2) + \eta^2 = 3 - 2\eta^2 \leq 3$$

となりますから，制約条件の下で $z \leq 3$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において z は最小値 3 を取ることが分かります.

演習 7.6B (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下で

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + 4xy + y^2$$

の最大値・最小値を求めましょう.

解答 (1) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - (-2)^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は対角化できます。

(2) A が定める 2 次形式を (1) で用いた回転座標変換を適用します。P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(P^{-1} AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= 3\xi^2 - \eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

さらに制約条件は

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

となりますから，制約条件を用いて η を消去すると

$$z = 3\xi^2 - \eta^2 = 3\xi^2 - (1 - \xi^2) = -1 + 4\xi^2 \geq -1$$

となりますから，制約条件の下で $z \geq -1$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\xi = 0$ 従って $\eta = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_2$$

において z は最小値 -1 を取ることが分かります.

他方，制約条件を用いて ξ を消去すると

$$z = 3\xi^2 - \eta^2 = 3(1-\eta^2) - \eta^2 = 3 - 4\eta^2 \leq 3$$

となりますから，制約条件の下で $z \leq 3$ であることが分かります。さらに最後の等号が $\eta = 0$ 従って $\xi = \pm 1$ のときに成立することから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_1$$

において z は最小値 3 を取ることが分かります.

演習 7.7 以下の対称行列 A を回転行列で対角化して、A が定める 2 次形式を回転座標変換で簡単にしましょう.

(1)$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$　　**(2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

解答 **(1)** まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-7) - (-3)^2 = (\lambda+2)(\lambda-8) \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 8$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 8$ のとき、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ 8\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(P^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(P^{-1} AP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -2\xi^2 + 8\eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

(2) まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 7) - (-4)^2 = (\lambda - 9)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 9$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 9$ のとき、

$$A\vec{v} = 9\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

　ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (9\vec{p}_1 \ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と A は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 9\xi^2 - \eta^2$$

となります。

演習 7.8 対称行列 $A \in M_2(\mathbf{R})$ が定める 2 次形式が正定値であるとします．このとき A は正則で，A^{-1} が対称となり，A^{-1} が定める 2 次形式も正定値となることを示しましょう．

A が定める 2 次形式が正定値ですから，

$$|A| > 0$$

が成立します．よって A は正則であることが分かります．

$$AA^{-1} = I_2$$

の両辺の転置をとると

$${}^t\left(A^{-1}\right){}^tA = {}^t\left(A^{-1}\right)A = I_2$$

が成立します．この両変に右から A^{-1} を掛けると

$${}^t\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$$

が従いますから，A^{-1} が対称であることが分かります．A の固有値 α, β は

$$\alpha, \beta > 0$$

となります．このとき回転行列 R が存在して

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成立します．この両辺の逆行列をとると

$$R^{-1}A^{-1}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

を得ます．

$$\Phi_{A^{-1}}(\lambda) = \Phi_{R^{-1}A^{-1}R} = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{1}{\beta} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{1}{\alpha})(\lambda - \frac{1}{\beta})$$

から A^{-1} の固有値が $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} > 0$ と正となります．よって対称な A^{-1} が定める 2 次形式は正定値となります．

演習 7.9 次の 2 次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう.

(1) $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3}-4)x + (\sqrt{3}-4)y + (4-\sqrt{3}) = 0$

(2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0$

(3) $2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0$

(4) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$

(5) $x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$

(6) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0$

解答 (1)

$$2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + (2\sqrt{3}-4)x + (\sqrt{3}-4)y + (4-\sqrt{3}) = 0 \tag{1}$$

は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + 4 - \sqrt{3} = 0 \tag{2}$$

と表されます. 平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって (2) は

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

となりますから, ここで

$$2A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\vec{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{2}\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= 2\sqrt{3}-6\end{aligned}$$

と計算されますから (2) は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\sqrt{3}-6=0 \tag{3}$$

となります．

次に A を回転行列で対角化します．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-\frac{5}{2})$$

から A の固有値は $\lambda=\frac{1}{2},\frac{5}{2}$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます．

$\lambda=\frac{1}{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\cdot x+y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-\sqrt{3}\cdot x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\quad(x\neq 0)$$

か固有ベクトルとなります．

$\lambda=\frac{5}{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad x-\sqrt{3}\cdot y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cdot y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\quad(y\neq 0)$$

か固有ベクトルとなります．

ここで回転行列

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR=(A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2)=\left(\frac{1}{2}\vec{r}_1\ \frac{5}{2}\vec{r}_2\right)=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

から

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} $$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} $$

と回転座標変換を定めると

$$ \begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) &= \left(AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \left({}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 \end{aligned} $$

となりますから，この座標で (1) は

$$ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 = 6 - 2\sqrt{3} $$

と表され，楕円であることが分かります．

(2)

$$ x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0 \tag{1} $$

は

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} $$

とすると

$$ \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 4 - \sqrt{3} = 0 \tag{2} $$

と表されます．$|A| = 0$ ですから，A を回転行列で対角化することから始めます．

A の固有多項式は

$$ \Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) $$

から A の固有値は $\lambda = 0, 5$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます．

<u>$\lambda = 0$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 5$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (5 \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

　ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (0 \cdot \vec{r}_1\ 5 \cdot \vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= \left({}^tRAR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= 5\eta^2
\end{aligned}$$

$$\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\vec{b}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left({}^tR\vec{b}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$5\eta^2 + \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi = 0 \tag{3}$$

となります．さらにこれを

$$\xi = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\eta + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

と変形します．最後に

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換によって (1) は

$$X = \frac{\sqrt{5}}{2}Y^2$$

と表されます．

別解 (1) は

$$(x-2y)^2 - 8x + 6y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 0$$

と変形できます．回転座標変換を

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \\ \frac{-x+2y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と定めると (1) は

$$\eta^2 - \frac{8}{5}\cdot\frac{2\xi - \eta}{\sqrt{5}} + \frac{6}{5}\cdot\frac{\xi + 2\eta}{\sqrt{5}} = \eta^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta = 0$$

と表されます．

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + 32 = 0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} &\left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 32 = 70 \end{aligned}$$

から

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 70 = 0$$

となります.

次に A を回転行列で対角化します.. A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 3$ であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

<u>$\lambda = -2$ のとき</u>

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 3$ のとき</u>

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (-2\vec{r}_1 \ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます. さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)=\left(AR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)$$
$$=\left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}-2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)$$
$$=-2\xi^2+3\eta^2$$

となりますから，この座標で (1) は

$$-2\xi^2+3\eta^2+70=0$$

と表され，双曲線であることが分かります．

(4) $A=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\vec{\alpha},\quad \text{ただし }\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+32$$
$$=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)$$
$$=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$
$$+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)$$
$$=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})=0$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})&=-\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})\\&=-\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

から (1) は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{1}{3}=0$$

となります．

さらに A，正確には 2 次形式 $\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$ を回転行列

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

で変換します．すなわち

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)&=\left(AR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2\end{aligned}$$

となります．ここで

$${}^tRAR=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であることを用いました．以上から与えられた 2 次曲線は楕円

$$\frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{3} = 0$$

であることが分かりました．

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - 5 = 0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad ただし\ \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると (1) は

$$\begin{aligned}
&\left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) - 5 \\
&= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) - 5 \\
&= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\
&\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) - 5 = 0
\end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
&\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) \\
&= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha})
\end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha}) &= \frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

から (1) は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{2}{3}-5=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{28}{3}=0$$

となります．

次に A を回転行列で対角化します．．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)$$

から A の固有値は $\lambda=-1,3$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます．

<u>$\lambda=-1$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x-y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad (x\neq 0)$$

か固有ベクトルとなります．

<u>$\lambda=3$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x+y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad (y\neq 0)$$

か固有ベクトルとなります．

ここで回転行列

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (-\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right) &= \left(AR\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, R\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)\\ &= \left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)\\ &= -\xi^2 + 3\eta^2\end{aligned}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$-\xi^2 + 3\eta^2 - \frac{28}{3} = 0$$

と表され，双曲線であることが分かります．

(6)

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 5y - 2 = 0 \tag{1}$$

について問題 (2) の別解と同様に考えてみます．すなわち

$$\left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right)^2 - y - \frac{2}{5} = 0 \tag{2}$$

と変形すると，回転座標変換

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

によって

$$\xi^2 - \frac{-2\xi + \eta}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5} = 0$$

となります．これを

$$\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\eta}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta = \sqrt{5}\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

とさらに変形します．ここで

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \eta - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えると

$$Y = \sqrt{5}X^2$$

となります．