追加問題 (2018 年版)

I (MSF2018 第 4 章 II) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

となる. 他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います.

II (MSF2018 第 4 章 III) **(1)** 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう.
(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう.

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta) \end{cases}$$

から

$$x+y=\sqrt{2}\xi, \quad xy=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)$$

となります．従って

$$\begin{aligned} z &= (x+y)^2-xy-x-2y \\ &= 2\xi^2-\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta)-2\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta) \\ &= \frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2-\frac{3}{\sqrt{2}}\xi-\frac{1}{\sqrt{2}}\eta \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{3}{16}-\frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{7}{16} \end{aligned}$$

から $\xi=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，すなわち $x=-\frac{1}{4}$，$y=\frac{3}{4}$ のとき z は最小値 $-\frac{7}{16}$ をとります．

III (MSF2018 第 4 章 IV)

$$z=x^2-xy+y^2-2x+3y$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

解答 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z=\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha}=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)\\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)\\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

と展開できます．ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, {}^{t}A\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)
$$

と変形すると

$$
\begin{aligned}
z &= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)\\
&= \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+(\vec{b}, \vec{\alpha})
\end{aligned}
$$

となります．ここで

$$
2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}
$$

すなわち

$$
\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+(\vec{b}, \vec{\alpha}) &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha})\\
&= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

から

$$
z=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\frac{2}{3}
$$

となります．

IV (MSF2018 第 4 章 VI)

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して，平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう．

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + 32$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \\ &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right) + 32 \\ &= \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned}(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= -\frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + 32 = 70\end{aligned}$$

から

$$z = \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) + 70$$

となります．

V (MSF2018 第 4 章 VII) $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2$$

となります．ここで $a > 0,\ ab - c^2 > 0$ から

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

であることが分かります．さらにこの不等式における等号成立の必要十分条件は

$$a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = 0, \quad \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

すなわち

$$x + \frac{c}{a}y = y = 0 \quad i.e. \quad x = y = 0$$

ですから，$x \neq 0$ または $y \neq 0$ が成立するとき

$$a\left(x+\frac{c}{a}y\right)^2+\frac{ab-c^2}{a}y^2>0$$

となります.

VI $A=\begin{pmatrix}5-c & 2\\ 2 & 2-c\end{pmatrix}$ に対して

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)>0 \quad \left(\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\vec{0}\right)$$

を満たす $c \in \mathbf{R}$ をすべて求めましょう.

解答　求める条件は

$$5-c>0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix}5-c & 2\\ 2 & 2-c\end{vmatrix}>0$$

となります.

$$\begin{vmatrix}5-c & 2\\ 2 & 2-c\end{vmatrix}=(5-c)(2-c)-2^2=(c-1)(c-6)>0 \quad \Leftrightarrow c<1, c>6$$

なので，求める条件は

$$c<1$$

であることが分かります.

VII 関数

$$z=x^2+xy+y^2-4x+6y$$

に対して回転座標変換

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

を用いて、最小値を求めましょう.

解答

$$z=(x+y)^2-xy-4x+6y$$

に

$$x+y=\sqrt{2}X, \quad xy=\frac{1}{2}\left(X^2-Y^2\right)$$

を代入して

$$\begin{aligned} z &= 2X^2-\frac{1}{2}\left(X^2-Y^2\right)-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)+6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}Y^2+\sqrt{2}X+5\sqrt{2}Y \\ &= \frac{3}{2}\left(X+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{1}{2}(Y+5\sqrt{2})^2-\frac{1}{3}-25 \end{aligned}$$

から $X=-\frac{\sqrt{2}}{3}$, $Y=-5\sqrt{2}3$ のとき，すなわち

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}+5\sqrt{2}\right)=\frac{14}{3} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}-5\sqrt{2}\right)=-\frac{16}{3} \end{aligned}$$

のとき最小値 $z=-25$ をとります.

VIII 曲線 $x^2+3xy+y^2-1=0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう.

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \end{cases}$$

から

$$x+y=\sqrt{2}X, \quad xy=\frac{1}{2}(X^2-Y^2)$$

となります．これから

$$x^2+3xy+y^2-1=2X^2+\frac{1}{2}(X^2-Y^2)-1 \qquad =\frac{5}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2-1$$

となります.

問題 IX(1) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化して、B が定める 2 次形式 $\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ を簡単にしましょう。

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda-7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(\lambda-7) - (-3)^2 = (\lambda+2)(\lambda-8)\end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 8$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 8$ のとき、

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ 8\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

から $B = P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}P^{-1}$ と B は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned}\left(B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) &= \left(P^{-1}B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)\\ &= \left(P^{-1}BP\cdot P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)\\ &= -2\xi^2 + 8\eta^2\end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

を用いました。

XI(2) $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ を回転行列で対角化して、B が定める 2 次形式 $\left(B\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)$ を簡単にしましょう。

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| &= \begin{vmatrix}\lambda - 1 & -2\\ -2 & \lambda - 1\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-1)^2 - (-2)^2 = (\lambda+1)(\lambda-3)\end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$B\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$B\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1\ B\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $B = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned} \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(P^{-1} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(P^{-1} BP \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 3\xi^2 - \eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

XI(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 7) - (-4)^2 = (\lambda - 9)(\lambda + 1)$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 9$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 9$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 9$ のとき、

$$B\vec{v} = 9\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (9\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}\right)\end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 9\xi^2 - \eta^2$$

となります。

XI(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$B\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 3$ のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1\ 3\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = -2\xi^2 + 3\eta^2$$

となります。

XI(5) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 3 \\ 3 & \lambda - 11 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 11) - 4 = (\lambda - 2)(\lambda - 12)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 2, 12$ であることが分かります。次に $\lambda = 2, 12$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 2$ のとき、

$$B\vec{v} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 12$ のとき、

$$A\vec{v} = 12\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ と定めると、P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1\ 12\vec{p}_2) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v})\\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v})\\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}\right)\end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 2\xi^2 + 12\eta^2$$

となります。