演習 7.9 次の 2 次曲線を座標の平行移動と回転座標変換を用いて簡単にしましょう.
(1) $2x^2-\sqrt{3}xy+y^2+(2\sqrt{3}-4)x+(\sqrt{3}-4)y+(4-\sqrt{3})=0$
(2) $x^2-4xy+4y^2-8x+6y=0$
(3) $2x^2+4xy-y^2-20x-8y+32=0$
(4) $x^2+xy+y^2+x+y=0$
(5) $x^2-4xy+y^2+2x+4y-5=0$
(6) $x^2-4xy+4y^2-5y-2=0$

解答 (1)

$$2x^2-\sqrt{3}xy+y^2+(2\sqrt{3}-4)x+(\sqrt{3}-4)y+(4-\sqrt{3})=0 \tag{1}$$

は

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+4-\sqrt{3}=0 \tag{2}$$

と表されます．平行移動の座標変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって (2) は

$$\left(A\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)\right)+\left(2A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)+\vec{b}, \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)\right)+\left(A\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right)+\left(\vec{b}, \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)\right)+4-\sqrt{3}=0$$

となりますから，ここで

$$2A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=-\vec{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)&=\frac{1}{2}\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 \\ \sqrt{3}-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &=2\sqrt{3}-6\end{aligned}$$

と計算されますから (2) は

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-2+\sqrt{3}=0 \tag{3}$$

となります.

次に A を回転行列で対角化します. A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda-\frac{5}{2})$$

から A の固有値は $\lambda=\frac{1}{2},\frac{5}{2}$ であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda=\frac{1}{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{3}\cdot x-y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \sqrt{3}\cdot x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\quad(x\neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

$\lambda=\frac{5}{2}$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{5}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x+\sqrt{3}\cdot y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\cdot y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}\quad(y\neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR=(A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2)=\left(\frac{1}{2}\vec{r}_1\ \frac{5}{2}\vec{r}_2\right)=(\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

から

$$ {}^tRAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} $$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} $$

と回転座標変換を定めると

$$ \begin{aligned} \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) &= \left(AR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= \left({}^tRAR \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 \end{aligned} $$

となりますから，この座標で (1) は

$$ \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{5}{2}\eta^2 = 2 - \sqrt{3} $$

と表され，楕円であることが分かります．

(2)

$$ x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 6y = 0 \tag{1} $$

は

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} $$

とすると

$$ \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 0 \tag{2} $$

と表されます．$|A| = 0$ ですから，A を回転行列で対角化することから始めます．

A の固有多項式は

$$ \Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) $$

から A の固有値は $\lambda = 0, 5$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます．

<u>$\lambda = 0$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

<u>$\lambda = 5$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y = 0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1 \ A\vec{r}_2) = (0 \cdot \vec{r}_1 \ 5 \cdot \vec{r}_2) = (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \left(AR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= \left({}^tRAR\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) \\
&= 5\eta^2
\end{aligned}$$

$$\left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\vec{b}, R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \left({}^t R\vec{b}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$5\eta^2 + \frac{-10\xi + 20\eta}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \eta^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi = 0 \tag{3}$$

となります．さらにこれを

$$\xi = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\eta + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

と変形します．最後に

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換によって (1) は

$$X = \frac{\sqrt{5}}{2}Y^2$$

と表されます.

別解 (1) は

$$(x - 2y)^2 - 8x + 6y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{x - 2y}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 0$$

と変形できます．回転座標変換を

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \\ \frac{-x+2y}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と定めると (1) は

$$\eta^2 - \frac{8}{5}\cdot\frac{2\xi - \eta}{\sqrt{5}} + \frac{6}{5}\cdot\frac{\xi + 2\eta}{\sqrt{5}} = \eta^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\xi + \frac{4}{\sqrt{5}}\eta = 0$$

と表されます.

(3) $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-20\\ -8\end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right)+32=0 \tag{1}$$

と表現できます.

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}-\vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned}
&\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+32\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)+32\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)\\
&\qquad+(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)+32
\end{aligned}$$

と展開できます．ここで

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
z&=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+\left(\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b}, \vec{\alpha}\right)+32\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})+(\vec{b}, \vec{\alpha})+32
\end{aligned}$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-20\\ -8\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}36\\ 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

と定めると

$$(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})+32=\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})+32$$
$$=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-20\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)+32=-6$$

から

$$\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-6=0$$

となります.

次に A を回転行列で対角化します. A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+2)$$

から A の固有値は $\lambda=-2,3$ であることが分かります. さらに固有ベクトルを求めます.

$\lambda=-2$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad 2x+y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-2x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\quad(x\neq0)$$

か固有ベクトルとなります.

$\lambda=3$ のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x-2y=0$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(y\neq0)$$

か固有ベクトルとなります.

ここで回転行列

$$R=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (-2\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right) &= \left(AR\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, R\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)\\ &= \left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)\\ &= -2\xi^2 + 3\eta^2\end{aligned}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$-2\xi^2 + 3\eta^2 - 6 = 0$$

と表され，双曲線であることが分かります．

(4) $A = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right) = 0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$
\begin{aligned}
&\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)\\
&\qquad+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

と展開できます．ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)
$$

と変形すると

$$
\begin{aligned}
&\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})=0
\end{aligned}
$$

となります．ここで

$$
2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}
$$

すなわち

$$
\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})&=-\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})\\
&=-\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

から (1) は

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{1}{3}=0
$$

となります．

さらに A，正確には 2 次形式 $\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$ を回転行列

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

を用いた座標変換

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

で変換します．すなわち

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)&=\left(AR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left(\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2\end{aligned}$$

となります．ここで

$${}^tRAR=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

であることを用いました．以上から与えられた 2 次曲線は楕円

$$\frac{3}{2}\xi^2+\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{3}=0$$

であることが分かりました．

(5) $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ とすれば

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)-5=0 \tag{1}$$

と表現できます．

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\vec{\alpha},\quad \text{ただし } \vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると (1) は

$$
\begin{aligned}
&\left(A\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right),\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)-5\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}+\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)-5\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)+\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)\\
&\qquad+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)-5=0
\end{aligned}
$$

と展開できます．ここで

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},{}^tA\vec{\alpha}\right)=\left(\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},A\vec{\alpha}\right)=\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)
$$

と変形すると

$$
\begin{aligned}
&\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+2\left(A\vec{\alpha},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+\left(\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(\vec{b},\vec{\alpha}\right)\\
&=\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\left(2A\vec{\alpha}+\vec{b},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})
\end{aligned}
$$

となります．ここで

$$2A\vec{\alpha}+\vec{b}=\vec{0}$$

すなわち

$$
\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}
$$

と定めると

$$
\begin{aligned}
(A\vec{\alpha},\vec{\alpha})+(\vec{b},\vec{\alpha})&=\frac{1}{2}(\vec{b},\vec{\alpha})\\
&=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\right)=\frac{13}{3}
\end{aligned}
$$

から (1) は

$$
\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)+\frac{13}{3}-5=0\quad \text{すなわち}\quad \left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)-\frac{2}{3}=0
$$

となります．

次に A を回転行列で対角化します．．A の固有多項式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

から A の固有値は $\lambda=-1,3$ であることが分かります．さらに固有ベクトルを求めます．

<u>$\lambda=-1$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x-y=0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります．

<u>$\lambda=3$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x+y=0$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

か固有ベクトルとなります．

ここで回転行列

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を定めると

$$AR = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (-\vec{r}_1\ 3\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から

$${}^tRAR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と A は回転行列 R によって対角化されます．さらに

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

と回転座標変換を定めると

$$\begin{aligned}\left(A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)&=\left(AR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},R\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=\left({}^tRAR\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)\\&=-\xi^2+3\eta^2\end{aligned}$$

となりますから，この座標で (1) は

$$-\xi^2+3\eta^2-\frac{2}{3}=0$$

と表され，双曲線であることが分かります.

(6)

$$x^2-4xy+4y^2-5y-2=0 \tag{1}$$

について問題 (2) の別解と同様に考えてみます．すなわち

$$\left(\frac{x-2y}{\sqrt{5}}\right)^2-y-\frac{2}{5}=0 \tag{2}$$

と変形すると，回転座標変換

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

によって

$$\xi^2-\frac{-2\xi+\eta}{\sqrt{5}}-\frac{2}{5}=0$$

となります．これを

$$\left(\xi+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{\eta}{\sqrt{5}}-\frac{3}{5}=0 \quad すなわち \quad \eta=\sqrt{5}\left(\xi+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

とさらに変形します．ここで

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi+\frac{1}{\sqrt{5}}\\\eta+\frac{3}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換を考えると

$$Y=\sqrt{5}X^2$$

となります.