

追加問題 (2021 年版)

I (MSF2018 第4章 II) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対してその転置行列を ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ によって定義します. $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{\alpha} \ \vec{\beta}), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{w}) &= (x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}, \vec{w}) = x(\vec{\alpha}, \vec{w}) + y(\vec{\beta}, \vec{w}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる. 他方

$${}^tA\vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix}$$

から

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tA\vec{w} \right) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

が従います.

II (MSF2018 第4章 III) (1) 座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

によって

$$z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$$

を ξ, η で表しましょう.

(2) (1) を用いて z の最小値を求めましょう.

解答

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases}$$

から

$$x + y = \sqrt{2}\xi, \quad xy = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

となります。従って

$$\begin{aligned} z &= (x + y)^2 - xy - x - 2y \\ &= 2\xi^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) - 2\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \\ &= \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2}\left(\xi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{7}{16} \end{aligned}$$

から $\xi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, すなわち $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$ のとき z は最小値 $-\frac{7}{16}$ をとります。

III (MSF2018 第 4 章 IV)

$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y$$

に対して, 平行移動の座標変換を用いて 1 次の項のない形にしましょう。

解答 $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

よって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

と展開できます. ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) \end{aligned}$$

となります. ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{b} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) &= \frac{1}{2} (\vec{b}, \vec{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - \frac{2}{3}$$

となります.

IV (MSF2018 第4章 VI)

$$z = 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32$$

に対して、平行移動の座標変換を用いて1次の項のない形にしましょう。

解答 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}$ とすれば

$$z = \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + 32$$

と表現できます。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{\alpha}, \quad \text{ただし } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

によって平行移動の座標変換を定めると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \end{aligned}$$

と展開できます。ここで

$$\left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, {}^t A \vec{\alpha} \right) = \left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A\vec{\alpha} \right) = \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right)$$

と変形すると

$$\begin{aligned} z &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + 2 \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \\ &= \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + \left(2A\vec{\alpha} + \vec{b}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \left(\vec{b}, \vec{\alpha} \right) + 32 \end{aligned}$$

となります。ここで

$$2A\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{0}$$

すなわち

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{b} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 &= \frac{1}{2}(\vec{b}, \vec{\alpha}) + 32 \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -20 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + 32 = -6 \end{aligned}$$

から

$$z = \left(A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) - 6$$

となります.

V (MSF2018 第4章 VII) $a > 0, ab - c^2 > 0$ のとき

$$ax^2 + 2cxy + by^2 > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$ax^2 + 2cxy + by^2 = a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2$$

となります. ここで $a > 0, ab - c^2 > 0$ から

$$a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0$$

であることが分かります. さらにこの不等式における等号成立の必要十分条件は

$$a \left(x + \frac{c}{a}y \right)^2 = 0, \quad \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0$$

すなわち

$$x + \frac{c}{a}y = y = 0 \quad \text{i.e.} \quad x = y = 0$$

ですから、 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ が成立するとき

$$a \left(x + \frac{c}{a} y \right)^2 + \frac{ab - c^2}{a} y^2 > 0$$

となります。

VI $A = \begin{pmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{pmatrix}$ に対して

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

を満たす $c \in \mathbf{R}$ をすべて求めましょう。

解答 求める条件は

$$5 - c > 0 \quad \text{かつ} \quad \begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} > 0$$

となります。

$$\begin{vmatrix} 5-c & 2 \\ 2 & 2-c \end{vmatrix} = (5-c)(2-c) - 2^2 = (c-1)(c-6) > 0 \quad \Leftrightarrow c < 1, c > 6$$

なので、求める条件は

$$c < 1$$

であることが分かります。

VII 関数

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x + 6y$$

に対して回転座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

を用いて、最小値を求めましょう。

解答

$$z = (x + y)^2 - xy - 4x + 6y$$

に

$$x + y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

を代入して

$$\begin{aligned} z &= 2X^2 - \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ &= \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{2}X + 5\sqrt{2}Y \\ &= \frac{3}{2} \left(X + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \frac{1}{2}(Y + 5\sqrt{2})^2 - \frac{1}{3} - 25 \end{aligned}$$

から $X = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $Y = -5\sqrt{2}$ のとき, すなわち

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + 5\sqrt{2} \right) = \frac{14}{3} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - 5\sqrt{2} \right) = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

のとき最小値 $z = -25$ をとります.

VIII 曲線 $x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 0$ が回転座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ によっていかなる式で表されるか考えましょう.

解答

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$$

から

$$x + y = \sqrt{2}X, \quad xy = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$$

となります. これから

$$x^2 + 3xy + y^2 - 1 = 2X^2 + \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) - 1 = \frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1$$

となります。

問題 IX(1) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化して、 B が定める 2 次形式 $\left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ を簡単にしましょう。

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda) &= |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 7) - (-3)^2 = (\lambda + 2)(\lambda - 8) \end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = -2, 8$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 8$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 8$ のとき、

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

$$\text{ここで } \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ により } P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

と定めると、 P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1 \ B\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1 \ 8\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

から $B = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned} \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(P^{-1} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(P^{-1} B P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= -2\xi^2 + 8\eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

XI(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化して、 B が定める 2 次形式 $\left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ を簡単にしましょう。

解答 まず B の固有値を求めます。

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda) &= |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 - (-2)^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

から B の固有値は $\lambda = -1, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 3$ のとき、

$$B\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$B\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ と定めると、 P は回転行列となります。さらに

$$BP = (B\vec{p}_1 \ B\vec{p}_2) = (3\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $B = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は対角化できます。さらに P が回転行列ですから P^{-1} も回転行列で

$$\begin{aligned} \left(B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= \left(P^{-1} B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(P^{-1} B P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \\ &= 3\xi^2 - \eta^2 \end{aligned}$$

となります。ここで回転座標変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いました。

XI(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 7) - (-4)^2 = (\lambda - 9)(\lambda + 1)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -1, 9$ であることが分かります。次に $\lambda = -1, 9$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 9$ のとき、

$$B\vec{v} = 9\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = -1$ のとき、

$$A\vec{v} = -\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ と定めると、 P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (9\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める2次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。 P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right)\end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 9\xi^2 - \eta^2$$

となります。

XI(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = -2, 3$ であることが分かります。次に $\lambda = -2, 3$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = -2$ のとき、

$$B\vec{v} = -2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 2x - y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 3$ のとき、

$$A\vec{v} = 3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ と定めると、 P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (-2\vec{p}_1 \ 3\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める2次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。 P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned} (A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right) \end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = -2\xi^2 + 3\eta^2$$

となります。

XI(5) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$ を回転行列で対角化しましょう。

解答 まず A の固有値を求めます。

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 3 \\ 3 & \lambda - 11 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 11) - 4 = (\lambda - 2)(\lambda - 12)\end{aligned}$$

から A の固有値は $\lambda = 2, 12$ であることが分かります。次に $\lambda = 2, 12$ に対して、それぞれの固有ベクトルを求めます。

(i) $\lambda = 2$ のとき、

$$B\vec{v} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 3y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

(ii) $\lambda = 12$ のとき、

$$A\vec{v} = 12\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

から、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

ここで $\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ により $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ と定めると、 P は回転行列となります。さらに

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (2\vec{p}_1 \ 12\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

から $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}$ と B は回転行列 P を用いて対角化できます。ここで A が定める 2 次形式

$$\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

を考えましょう。 P^{-1} も回転行列ですから、内積を保ちます。このことを用いると

$$\begin{aligned}(A\vec{v}, \vec{v}) &= (P^{-1}A\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= (P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{v}, P^{-1}\vec{v} \right)\end{aligned}$$

が従います。さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P^{-1}\vec{v} \quad \text{すなわち} \quad \vec{v} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

とすると

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = 2\xi^2 + 12\eta^2$$

となります。