教科書第 1 章演習問題解答

演習 1.01（教科書 2p） 次のベクトルの計算をしましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$ (3) $3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (4) $0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(5) $6\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ (6) $9\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ (7) $3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

（解答省略）

演習 1.02（教科書 2p）

4 次元ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して，第 2 成分と第 3 成分が何か答えましょう．

解答 第 2 成分 $= -5$，第 3 成分 $= 3$

演習 1.03（教科書 3p）

(1.3) の残りの公式

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}, \quad 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

を証明しましょう．

解答 $\vec{x} = (x_i)$ と第 i 成分を用いて表現します．このとき

$$\vec{x} + \vec{0} = (x_1) + (0) = (x_i + 0) = (x_i) = \vec{x}$$

$$\vec{0} + \vec{x} = (0) + (x_i) = (0 + x_i) = (x_i) = \vec{x}$$

$$0 \cdot \vec{x} = 0(x_i) = (0 \cdot x_i) = (0) = \vec{0}$$

演習 1.04（教科書 3p） (1.4) すなわち

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$$

を証明しましょう．

解答 $\vec{x} = (x_i)$, $\vec{y} = (y_i)$ と第 i 成分を用いて表現します．このとき

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_i) - (y_i) = (x_i - y_i)$$

$$\vec{x}+(-\vec{y})=(x_i)+(-y_i)=(x_i-y_i)$$

から $\vec{x}-\vec{y}=\vec{x}+(-\vec{y})$ が示されます.

演習 1.05（教科書 4p） 定理 1.1 の (2) すなわち $\vec{a},\ \vec{b}\in\mathbf{R}^n$ と $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$

$$(\lambda+\mu)\,\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

を示しましょう.

解答 $\vec{a}=(a_i),\vec{b}=(b_i)$ と第 i 成分を用いて表現します．このとき

$$\lambda\,(\mu\vec{a})=\lambda(\mu\cdot a_i)=(\lambda(\mu\cdot a_i))=((\lambda\mu)\cdot a_i)=(\lambda\mu)\vec{a}$$

$$(\lambda+\mu)\,\vec{a}=(\lambda+\mu)(a_i)=((\lambda+\mu)a_i)=(\lambda a_i+\mu a_i)=(\lambda a_i)+(\mu a_i)=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda((a_i)+(b_i))=\lambda(a_i+b_i)=(\lambda(a_i+b_i))=(\lambda a_i+\lambda b_i)=(\lambda a_i)+(\lambda b_i)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

演習 1.06（教科書 5p）
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ を $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\in\mathbf{R}^3$ のスカラー倍の和で表しましょう.

解答

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+3\vec{e}_3$$

演習 1.07（教科書 5p） $\vec{a},\ \vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して次の計算をしましょう.
(1) $(2\vec{a}-\vec{b})+4\vec{a}-2\vec{b}$ **(2)** $3(2\vec{a}+\vec{b})-2(4\vec{a}-2\vec{b})$

解答 (1) $6\vec{a}-3\vec{b}$ **(2)** $-2\vec{a}+7\vec{b}$

演習 1.08（教科書 5p） $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z},\ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ が関係式

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

満たしているとします．このとき $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表しましょう．

解答

$$\begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1) \\ 2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z} = \vec{b} & (2) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z} = \vec{c} & (3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)_1 = (1) \\ 3\vec{y} - -5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{b} & (2)_1 = (2) - 2 \times (2) \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (3)_1 = (3) - 3 \times (3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z} = \vec{a} & (1)_2 = (1)_1 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_2 = (3)_1 \\ 3\vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{b} & (3)_2 = (2)_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - 3\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{c} & (1)_3 = (1)_2 + (2)_2 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_3 = (2)_2 \\ 10\vec{z} = 7\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} & (3)_3 = (3)_2 - 3 \times (2)_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} - 3\vec{z} = -2\vec{a} + \vec{c} & (1)_4 = (1)_3 \\ \vec{y} - 5\vec{z} = -3\vec{a} + \vec{c} & (2)_4 = (2)_3 \\ \vec{z} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_4 = \frac{1}{10} \times (3)_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \frac{1}{10}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{10}\vec{c} & (1)_5 = (1)_4 + 3 \times (3)_4 \\ \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} & (2)_5 = (2)_4 + 5 \times (3)_4 \\ \vec{z} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} - \frac{3}{10}\vec{c} & (3)_5 = (3)_4 \end{cases}$$

演習 1.09（教科書 7p） (1.16) すなわち $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbf{R}^n)^*$ と $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\vec{x} = \mathbf{a}\vec{x} + \mathbf{b}\vec{x}, \quad (\lambda\mathbf{a})\vec{x} = \lambda(\mathbf{a}\vec{x})$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i-1}^{n} b_i x_i = \mathbf{a}\vec{x} + \mathbf{b}\vec{x}$$

$$(\lambda\vec{a})\vec{x} = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda(\mathbf{a}\vec{x})$$

演習 1.10（教科書 8p） $\mathbf{a} \in (\mathbf{R}^n)^*$ とします．

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\vec{x}) = 0$$

がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して成立するならば $\mathbf{a} = \mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ が成立することを示しましょう．

解答 $\mathbf{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)\,(\mathbf{R}^n)^*$ とします．このとき，標準単位ベクトル $\vec{e}_i$ に対して

$$\Phi_{\mathbf{a}}(\vec{e}_i) = a_i = 0$$

となります．これすべての i に対して成立するので

$$\mathbf{a} = (0 \ \cdots \ 0) = \mathbf{0}$$

が従います．

演習 1.11（教科書 9p） $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して ${}^t\vec{a} \cdot \vec{w}$ を計算しましょう．

解答

$${}^t\vec{a} \cdot \vec{w} = (1 \ \ -2 \ 3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x - 2y + 3z$$

演習 1.12（教科書 9p） $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_\ell \in \mathbf{R}^n$ と $c_1, \cdots, c_\ell \in \mathbf{R}$ に対して

$$ {}^t(c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_\ell\vec{a}_\ell) = c_1{}^t\vec{a}_1 + \cdots + c_\ell{}^t\vec{a}_\ell \tag{1}$$

を証明しましょう．

解答 帰納的に

$$ {}^t(\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_\ell) = {}^t\vec{a}_1 + \cdots + {}^t\vec{a}_\ell $$

が成立しますことが示せます．実際

$$ {}^t(\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_{\ell-1} + \vec{a}_\ell) = {}^t(\vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_{\ell-1}) + {}^t\vec{a}_\ell = {}^t\vec{a}_1 + \cdots + {}^t\vec{a}_{\ell-1} + {}^t\vec{a}_\ell $$

と証明できます．これを用いると

$$ {}^t(c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_\ell\vec{a}_\ell) = {}^t(c_1\vec{a}_1) + \cdots + {}^t(c_\ell\vec{a}_\ell) = c_1{}^t\vec{a}_1 + \cdots + c_\ell{}^t\vec{a}_\ell $$

となります．これが示すべき式です．

演習 1.13（教科書 10p） 4 次元ベクトル

$$ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} $$

に対して $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{b}, \vec{c})$, $(\vec{c}, \vec{a})$ を計算しましょう．次に $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$ を計算しましょう．

解答

$$ (\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -11 $$

$$ (\vec{b}, \vec{c}) = 2 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = -4 $$

$$ (\vec{c}, \vec{a}) = 6 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 1 $$

$$ \|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} $$

$$ \|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{30} $$

$$ \|\vec{c}\| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{47} $$

演習 1.14（教科書 12p） (1.27) すなわち非負の実数 $A_1, \cdots, A_n \geq 0$ に対して

$$ A_1 + A_2 + \cdots + A_n = 0 \Longrightarrow A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0 \tag{2}$$

が成立することを $n = 2$ に対して示しましょう．一般の n の場合を数学的帰納法により証明しましょう．

解答 （$n = 2$ の場合）$A_1 + A_2 = 0$ が成立するとします．$A_1 \neq 0$ とします．$A_2 = -A_1 \leq 0$ となりますから，$A_2 < 0$ が従います．これは $A_2 \geq 0$ に反しますから，$A_2 = 0$ であることが分かります．さらに $A_1 = -A_2 = 0$ も従います．

（一般の場合）$A_1+A_2+\cdots+A_n=0$ が成立するとします．ここで $A_n\neq 0$ とします．

$$A_n=-A_1-A_2-\cdots-A_{n-1}\leq 0$$

から $A_n<0$ が従います．これは $A_n\geq 0$ に反しますから，$A_n=0$ であることが分かります．さらに $A_1+A_2+\cdots+A_n=0$ に代入すると

$$A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}=0$$

が従います．帰納法の仮定から $A_1=\cdots=A_{n-1}=0$ が成立することが分かります．

演習 1.15（教科書 12p） 大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**と呼びます．$\vec{x}\in\mathbf{R}^n$ が $\vec{x}\neq\vec{0}$ であるとき $\vec{x}_0=\dfrac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}$ が単位ベクトルとなることを証明しましょう．

解答

$$\|\vec{x}_0\|=\left\|\frac{1}{||\vec{x}||}\vec{x}\right\|=\frac{1}{\|\vec{x}\|}\cdot\|\vec{x}\|=1$$

から $\vec{x}_0$ が単位ベクトルであることが分かります．

演習 1.16（教科書 12p） $\vec{a}={}^t(1\ \ -1\ 3)$, $\vec{b}={}^t(2\ 1\ \ -1)$ に対して

$$f(t)=\|\vec{b}-t\vec{a}\|^2$$

を考えます．このとき公式 (1.28) を用いて $f(t)$ の最小値を求めましょう．

解答 まず

$$\|\vec{a}\|^2=11,\quad (\vec{a},\vec{b})=-2,\quad \|\vec{b}\|^2=6$$

と計算します．これを用いると

$$\begin{aligned}f(t)&=\|\vec{b}\|^2-2t(\vec{a},\vec{b})+t^2\|\vec{a}\|^2\\&=11t^2+4t+6\\&=11\left(t+\frac{2}{11}\right)^2+6-\frac{4}{11}\end{aligned}$$

と平常完成すると $t=-\frac{5}{11}$ のときに最小値 $6-\frac{4}{11}=\frac{62}{11}$ をとることが分かります．

演習 1.17（教科書 13p） $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\| \ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \ \|^2 = \| \ \vec{a} \ \|^2 + \| \ \vec{b} \ \|^2 + \| \ \vec{c} \ \|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a})$$

を示しましょう．

解答

$$\begin{aligned} ||\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}||^2 &= ||\vec{a} + \vec{b} + ||^2 + 2(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + ||\vec{b}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{a}, \vec{c}) \end{aligned}$$

演習 1.18（教科書 13p） $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．$\vec{a} \perp \vec{b}$，かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ ならば

$$\vec{a} \perp (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c})$$

が成立することを示しましょう．

解答 $\vec{a} \perp \vec{b}$，かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ ならば $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = 0$ が成立します．このとき

$$(\vec{a}, \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) + \mu(\vec{a}, \vec{c}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

となりますが，これは $\vec{a} \perp (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c})$ を意味します．

演習 1.19（教科書 13p） $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう．

解答 $\vec{x} = \vec{a}$ とすると

$$0 = (\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$$

から $\vec{a} = 0$ が従います．

演習 1.20（教科書 13p） $\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3} \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします．このとき $\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \vec{f_3}$ は**正規直交系**であるといいます.

(1) $||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 = x^2 + y^2$, $||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を示しましょう.

(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して $||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})$,

$$||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2} - z\vec{f_3}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) - 2z(\vec{g}, \vec{f_3})$$

を示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned}
||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2 + 2(x\vec{f_1}, y\vec{f_2}) + ||y\vec{f_2}||^2 \\
&= x^2||\vec{f_1}||^2 + 2xy(\vec{f_1}, \vec{f_2}) + y^2||\vec{f_2}||^2 \\
&= x^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 \\
||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 + 2(x\vec{f_1} + y\vec{f_2}, z\vec{f_3}) + ||z\vec{f_3}||^2 \\
&= x^2 + y^2 + 2xz(\vec{f_1}, \vec{f_3}) + 2yz(\vec{f_2}, \vec{f_3}) + z^2||\vec{f_3}||^2 \\
&= x^2 + y^2 + 2xz \cdot 0 + 2yz \cdot 0 + z^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(x\vec{f_1} + y\vec{f_2}, \vec{g}) + ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{f_1} + y\vec{f_2}, \vec{g}) - 2y(\vec{f_2}, \vec{g}) + x^2 + y^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})
\end{aligned}$$

演習 1.21（教科書 14p）(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき μ を求めましょう．

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行とならないことを示しましょう．

解答 (1)

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcll} x & + & 2y & = & 0 & (i) \\ -2x & - & 4y & = & 0 & (ii) \\ -4x & + & \mu y & = & 0 & (iii) \end{array} \right.$$

である．$(iii) + 4 \times (i)$ を考えると

$$(\mu + 8)y = 0$$

となります．$\mu \neq -8$ ならば $y = 0$ となり，さらに (i) から $x = -2y = 0$ が従いますから $\vec{a} \parallel \vec{b}$ となります．以上で $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば $\mu = -8$ であることが示されました．逆に $\mu = -8$ のとき

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{a}$$

から $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であることが従います．

(2)

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcll} x & + & 2y & = & 0 & (i) \\ -3x & - & 4y & = & 0 & (ii) \\ -4x & + & \mu y & = & 0 & (iii) \end{array} \right.$$

であることに注意します．$(ii) + 3 \times (i)$ を考えると

$$2y = 0 \quad \text{従って} \quad y = 0$$

となります．さらに (i) から $x = -2y = 0$ も分かります．以上で $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であることが示されました．

演習 1.22（教科書 14p） $\vec{a},\ \vec{0} \in \mathbf{R}^n$ は常に平行であることを証明しましょう.

解答

$$0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

なので $\vec{a} \parallel \vec{0}$ であることが分かります.

演習 1.23（教科書 14p） $\vec{x},\ \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします. このとき次を示しましょう.

$$\vec{x} \nparallel (\lambda\vec{x} + \vec{y}), \quad (\vec{x} + \vec{y}) \nparallel (\vec{x} - \vec{y})$$

解答

$$c_1\vec{x} + c_2(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = (c_1 + \lambda c_2)\vec{x} + c_2\vec{y}$$

であることに注意します. $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から $c_1\vec{x}+c_2(\lambda\vec{x}+\vec{y}) = \vec{0}$ ならば $c_1+\lambda c_2 = c_2 = 0$ が従います. $c_1 = -\lambda c_2 = 0$ から $c_1 = c_2 = 0$ となりますから, $\vec{x} \nparallel (\lambda\vec{x} + \vec{y})$ であることが分かります. 同様に

$$c_1(\vec{x} + \vec{y}) + c_2(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$$

とすると

$$c_1(\vec{x} + \vec{y}) + c_2(\vec{x} - \vec{y}) = (c_1 + c_2)\vec{x} + (c_1 - c_2)\vec{y}$$

に注意すると

$$c_1 + c_2 = c_1 - c_2 = 0$$

が従います. $c_1 = \frac{1}{2}\left((c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)\right) = 0$, さらに $c_2 = -c_1 = 0$ も分かります. 以上で $(\vec{x}+\vec{y}) \nparallel (\vec{x}-\vec{y})$ が示されました.

演習 1.24（教科書 14p） 次のベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に対して, $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の正射影を求めましょう.

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 求める正射影（直交射影）ベクトルを $\vec{w}$ とします.

(1)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a}$$

(2)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

(3)

$$\vec{w} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{a}$$

演習 1.25（教科書 23p） $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとして，$\vec{p},\ \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ を

$$\vec{p} = c_1\vec{a} + d_1\vec{b}, \quad \vec{q} = c_2\vec{a} + d_2\vec{b}$$

と定めます．ここで $\Delta := c_1d_2 - c_2d_1 \neq 0$ と仮定します．
(1) 等式 $\vec{a} = \dfrac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q}),\ \vec{b} = \dfrac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q})$ を示しましょう．
(2) $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$ を示しましょう．
(3) $x\vec{a} + y\vec{b} = s\vec{p} + t\vec{q}$ であるとき

$$s = \frac{1}{\Delta}(xd_2 - yc_2), \qquad t = \frac{1}{\Delta}(-xd_1 + yc_1)$$

と座標変換の公式が得られることを示しましょう．

解答 (1)

$$\begin{cases} \vec{p} &=& c_1\vec{a} &+& d_1\vec{b} & (i) \\ \vec{q} &=& c_2\vec{a} &+& d_2\vec{b} & (ii) \end{cases}$$

と番号をつけます．$(i) \times d_2 - (ii) \times d_1$ と $(i) \times (-c_2) + (ii) \times c_1$ から

$$d_2\vec{p} - d_1\vec{q} = (c_1d_2 - c_2d_1)\vec{a} = \Delta\vec{a}$$

$$-c_2\vec{p} + c_1\vec{q} = (-c_2d_1 + c_1d_2)\vec{b} = \Delta\vec{b}$$

となります．$\Delta \neq 0$ を仮定していますから

$$\vec{a} = \frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q}), \qquad \vec{b} = \frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q})$$

が従います．
(2) 任意の $\vec{w} \in L(\vec{p}, \vec{q})$ は

$$\vec{w} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

と表され

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \xi(c_1\vec{a} + c_2\vec{b}) + \eta(d_1\vec{a} + d_2\vec{b}) \\ &= (\xi c_1 + \eta d_1)\vec{a} + (\xi c_2 + \eta d_2)\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

から $L(\vec{p}, \vec{q}) \subset L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが分かります．さらに任意の $\vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ は

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

と表され

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x \cdot \frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p} - d_1\vec{q}) + y \cdot \frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p} + c_1\vec{q}) \\ &= \frac{1}{\Delta}(xd_2 - yc_2)\vec{p} + \frac{1}{\Delta}(-xd_1 + yc_1)\vec{q} \in L(\vec{p}, \vec{q}) \end{aligned}$$

から $L(\vec{a}, \vec{b}) \subset L(\vec{p}, \vec{q})$ であることが分かります．以上で

$$L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

(3) $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ なので

$$s\vec{p}+t\vec{q}=x\cdot\frac{1}{\Delta}(d_2\vec{p}-d_1\vec{q})+y\cdot\frac{1}{\Delta}(-c_2\vec{p}+c_1\vec{q})=\frac{1}{\Delta}(xd_2-yc_2)\vec{p}+\frac{1}{\Delta}(-xd_1+yc_1)\vec{q}$$

から

$$s=\frac{1}{\Delta}(xd_2-yc_2),\qquad t=\frac{1}{\Delta}(-xd_1+yc_1)$$

が従います.

演習 1.26（教科書 25p） 演習 1.24(3) の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を考えます. $\vec{g}={}^t(1\ 0\ 0\ 0)$ に対して $\vec{g}$ の $L(\vec{a},\vec{b})$ への正射影（直交射影）ベクトル $\vec{v}_0$ を求めましょう.

解答 まず $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に GS の直交化を適用して $L(\vec{a},\vec{b})$ の正規直交基底を求めます. $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向の直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}=-\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求まります. さらに $\vec{a}$ に垂直な

$$\vec{b}-\vec{w}={}^t(1\ 0\ \ -1\ 1)+\frac{1}{4}{}^t(1\ 1\ 1\ \ -1)=\frac{1}{4}{}^t(5\ 1\ \ -3\ 3)$$

と求まります. お互いに直交する $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を大きさ 1 にした

$$\vec{p}:=\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}=\frac{1}{2}{}^t(1\ 1\ 1\ \ -1),\quad \vec{q}:=\frac{1}{\|\vec{b}-\vec{w}\|}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{44}}{}^t(5\ 1\ \ -3\ 3)$$

が $L(\vec{a},\vec{b})$ の正規直交基底になります. さらに

$$\begin{aligned}\vec{v}_0&=(\vec{p},\vec{g})\vec{p}+(\vec{q},\vec{g})\vec{q}\\&=\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}15\\1\\-3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}15\\1\\-3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

が $\vec{g}$ の $L(\vec{a},\vec{b})$ への直交射影となります.