教科書第 4 章演習問題解答

演習 4.1 y に関する公式 (4.3)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

を導いてください.

解答 (1) $\times\, c -$ (2) $\times\, a$ から $(bc-ad)y = c\alpha_1 - a\alpha_2$ したがって $(ad-bc)y = a\alpha_2 - c\alpha_1$ を得ます．これは $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}$ に他なりません．$\det(A) \neq 0$ のとき (4.3) が導かれます.

演習 4.2 次の行列式を計算しましょう.
(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ **(5)** $\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix}$ **(6)** $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix}$

解答

(1) 1 **(2)** 1 **(3)** λ **(4)** -1 **(5)** ab **(6)** ab

演習 4.3 上の定理 4.1 の (ii)

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}) = -\det(\vec{b}\ \vec{a})$$

と (ii)'

$$\det(\vec{a}\ \vec{a}) = 0$$

を証明してください．ただし (ii)' は (ii) を用いて証明してください.

解答 (ii) について

$$RHS = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -(b_1a_2 - b_2a_1) = a_1b_2 - a_2b_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = LHS$$

と (ii) が成立することが分かります．$(ii)'$ は $\det(\vec{a}\ \vec{a})$ の第 1 列と第 2 列を交換すると

$$\det(\vec{a}\ \vec{a}) = -\det(\vec{a}\ \vec{a})$$

となりますから $\det(\vec{a}\ \vec{a}) = 0$ であることが従います.

演習 4.4 定理 4.2 の (ii)

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

を証明してください．これに加えて定理 4.2 の (ii) を用いて定理 4.1 の列に関する性質から

$$\det\begin{pmatrix} \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c} \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

を導いてください.

解答 $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ とすると

$$LHS = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = a_1b_2 - a_2b_1 = \left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = RHS$$

と (ii) が導けました．これから $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^2$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \left(\mathbf{K}^2\right)^*$ に対して

$$\left|\vec{a}\ \vec{b}\right| = \begin{vmatrix} {}^t\tilde{\mathbf{a}} \\ {}^t\tilde{\mathbf{b}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \left|{}^t\mathbf{a}\ {}^t\mathbf{b}\right|$$

が成立することが分かりますので，これを用いて与えられて等式を示します.

$$\begin{aligned}
\det\left(\ \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \right) &= \left|{}^t(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\ {}^t\mathbf{c}\right| \\
&= \left|\lambda{}^t\mathbf{a}+\mu{}^t\mathbf{b})\ {}^t\mathbf{c}\right| \\
&= \lambda\left|{}^t\mathbf{a}\ {}^t\mathbf{c}\right| + \mu\left|{}^t\mathbf{b}\ {}^t\mathbf{c}\right| \\
&= \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c} \end{pmatrix} &= \left|{}^t\mathbf{a}{}^t(\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c})\right| \\
&= \left|{}^t\mathbf{a}\lambda{}^t\mathbf{b}+\mu{}^t\mathbf{c})\right| \\
&= \lambda\left|{}^t\mathbf{a}{}^t\mathbf{b}\right| + \mu\left|{}^t\mathbf{a}{}^t\mathbf{c}\right| \\
&= \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} + \mu\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \left|{}^t\mathbf{a}\ {}^t\mathbf{b}\right| = -\left|{}^t\mathbf{b}\ {}^t\mathbf{a}\right| = -\det\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

演習 4.5 行列式の値が 0 となる λ の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

解答 (1) $\lambda = 1, 6$ **(2)** $\lambda = 2, 5$

> **演習 4.6** 補助定理 4.2 を証明して，(4.6)
>
> $$|\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}| = \lambda|\vec{\alpha}\ \vec{b}\ \vec{c}| + \mu|\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}|$$
>
> を示しましょう．

解答

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 \end{pmatrix}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_1(\lambda x_2 + \mu y_2) + a_1(\lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \mu(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3) \\ &= \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}) \end{aligned}$$

と補助定理 4.2 が証明されました．次に (4.2) を示します．

$$F(\vec{x}) = |\vec{x}\ \vec{b}\ \vec{c}|$$

と定義します．これは 1 列の余因子展開によって

$$F(\vec{x}) = \left|\begin{smallmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{smallmatrix}\right| x_1 - \left|\begin{smallmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{smallmatrix}\right| x_2 + \left|\begin{smallmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{smallmatrix}\right| x_3$$

と表されますから，補助定理 4.2 が適用できます．従って

$$\begin{aligned} |\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= F(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \\ &= \lambda F(\vec{\alpha}) + \mu F(\vec{\beta}) \\ &= \lambda|\vec{\alpha}\ \vec{b}\ \vec{c}| + \mu|\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}| \end{aligned}$$

と (4.2) が従います．

> **演習 4.7** $a_1 = 0,\ a_2 \neq 0$ の場合に (4.10)
>
> $$\det({}^tA) = \det(A)$$
>
> を証明しましょう．

解答 1 行と 2 行を交換する基本行列 $P = P_3(1, 2)$ を用います．

$$B := PA = P\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

と定めると B の $(1, 1)$ 成分 $a_2 \neq 0$ となることに注意します．この場合は (4.10) はすでに示されていますから

$$\det({}^tB) = \det(B)$$

であることが分かります．さらに

$$\det({}^tB) = \det({}^tA{}^tP) = \det({}^tA)\det({}^tP)$$

$$\det(B) = \det(P)\det(A)$$

が成立し

$$\det(P) = \det({}^tP) = -1$$

も成立しますから

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

であることが分かります.

演習 4.8（教科書 96 ページ） 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -12 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

(4)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-c^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+c \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a)) \\ &= (a-b)(c-a)(a-c)\end{aligned}$$

演習 4.9(教科書 98 ページ)

（教科書 97 ページにおいて）$a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算して定理 4.5 の y の公式を導いてください.

解答 教科書 97 ページにある

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{III})$$

において $a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算すると

$$\begin{aligned} &\left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) x \\ &\quad + \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) y \\ &= \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) x \end{aligned}$$

となりますが，第 2 列の余因子展開と考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 & c_1 \\ \alpha_2 & a_2 & c_2 \\ \alpha_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となります．これから $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \neq 0$ を用いて

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が導けます．

演習 4.10 (教科書 98 ページ)　次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて

$$x = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 7 & -6\\ 0 & 7 & -13\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 7 & -6\\ 0 & 0 & -7\end{vmatrix} = -\frac{49}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}0 & 7 & 2\\ 0 & 8 & 0\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(-1)\begin{vmatrix}7 & 2\\ 8 & 0\end{vmatrix} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$z = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix}0 & 0 & 7\\ 0 & 5 & 8\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix}0 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

(2)

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて,

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -13\end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = 6$$

$$z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 4$$

演習 4.11（教科書 100 ページ） ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう.
(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, $\quad\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ $\quad$ **(2)** $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

解答 (1) $\vec{a} = {}^t(a_1\ a_2\ a_3)$, $\vec{b} = {}^t(b_1\ b_2\ b_3)$ とします. このとき

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_3 & a_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix} = -\vec{b}\times a$$

となります. さらに

$$\vec{a}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{a}$$

から

$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$

が従います.

(2) さらに $\vec{c} = {}^t(c_1\ c_2\ c_3)$ とすると

$$\vec{a} + \vec{b} = {}^t(a_1 + b_1\ a_2 + b_2\ a_3 + b_3)$$

となりますから

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$
$$= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が従います.

演習 4.12（教科書 100 ページ） $\vec{a} = {}^t(1\ 1\ 0)$, $\vec{b} = {}^t(0\ 1\ \ -1)$, $\vec{c} = {}^t(1\ 2\ 3)$ に対して，以下を求めましょう.
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積. **(2)** $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル.
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{c}$ が張る平行六面体の体積.

解答 (1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S は

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{3}$$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直ですから，大きさを 1 にした

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める単位ベクトルです.
(3) 求める体積を V にすると

$$V = abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

となります．他方

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

から $V = 4$ であることが分かります.