II 演習 4.9(教科書 98 ページ)
（教科書 97 ページにおいて）$a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算して定理 4.5 の y の公式を導いてください.

解答 教科書 97 ページにある

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III})$$

において $a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算すると

$$\begin{aligned} &\left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) x \\ &\quad + \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) y \\ &= \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}\right) x \end{aligned}$$

となりますが，第 2 列の余因子展開と考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 & c_1 \\ \alpha_2 & a_2 & c_2 \\ \alpha_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となります．これから $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \neq 0$ を用いて

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が導けます.